Tampereen yliopisto

Anniina Myötyri

YLIOPISTOMATEMATIIKAN OPISKELUN ALOITTAMISEN TUKEMINEN

Insinöörimatematiikka 1 -kurssi ja esimerkkinä propositiologiikan kehityskaari

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Diplomityö
Tammikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Anniina Myötyri: Yliopistomatematiikan opiskelun aloittamisen tukeminen, Insinöörimatematiikka 1 -kurssi ja esimerkkinä propositiologiikan kehityskaari
Diplomityö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Tammikuu 2020

Työssä tarkastellaan lukio- ja yliopistomatematiikan välistä siirtymävaihetta ja kertaamista oppimisen tukena. Siirtymävaihe aiheuttaa usein vaikeuksia opiskelijoille. Siirtymävaihetta on pyritty helpottamaan monissa yliopistoissa erilaisin tukitoimin. Uusimpana tukitoimena Tampereen yliopistossa kokeillaan lukuvuonna 2019–2020 tukimateriaaleja ja -harjoituksia.

Tukimateriaalit kertaavat suurimmaksi osaksi lukion pitkää matematiikkaa. Ne sisältävät lähinnä tehtäväsarjoja ja linkkejä opetusvideoihin. Tukimateriaalit on suunnattu Insinöörimatematiikan opiskelijoille. Insinöörimatematiikalla tarkoitetaan Tampereen yliopiston tekniikan kandidaateiksi opiskelevien opiskelijoiden ensimmäisiä matematiikan kursseja. Työssä keskitytään tutkimaan Insinöörimatematiikka 1 -kurssille tehtyjä tukimateriaaleja ja -harjoituksia.

Tukimateriaalien kunkin tehtäväsarjan alussa on tehtäväsarjan aiheeseen liittyvä teoriaosuus, jossa käsitellään tehtävien ratkaisemisen kannalta oleellisimmat asiat. Tehtäväsarjan tehtävät on toteutettu sähköisinä, automaattisesti tarkastettavina STACK-tehtävinä, joten niiden tekeminen onnistuu myös täysin verkossa. Opiskelijoille kuitenkin tarjotaan myös mahdollisuus tulla viikoittaiseen tukiharjoitustilaisuuteen laskemaan tehtäväsarjoja.

Tukiharjoituksista järjestetään kaksi erilaista toteutusta. Toisen toteutuksen harjoitusten alussa harjoitusten ohjaaja käy yhteisesti läpi tehtäväsarjaan liittyvää teoriaa, kun taas toisissa harjoituksissa aletaan suoraan laskea tehtäväsarjan tehtäviä ja opiskelijat tutustuvat tehtävien teon ohessa itsenäisesti aiheeseen liittyvään teoriaan. Molempien toteutuksien harjoituksissa on mahdollista kysyä harjoitusten ohjaajalta neuvoa tehtävien ratkaisemiseen.

Tukimateriaalit ovat jaoteltu viikoittaisiin aiheisiin sen mukaan, mitä asioita on syytä kerrata ennen kunkin viikon Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luentoja. Tällä tavoin opiskelijat pystyvät kertaamaan juuri kyseisellä viikolla Insinöörimatematiikan luennoilla käsiteltävien asioiden ymmärtämiseen vaadittavat esitiedot sekä luomaan helpommin sidosteisuutta vanhan ja uuden tiedon välille. Kertaamisen ja sidosteisuuden luomisen tärkeyttä on havainnollistettu työssä myös tutkimalla Insinöörimatematiikka 1 -kurssin aiheen, propositiologiikan, yhtä mahdollista kehityskaarta. Kehitys alkaa lukion propositiologiikasta ja päättyy propositiologiikan SAT-ongelmaan.

Lisäksi työssä tutkitaan opiskelijoiden tukiharjoituksiin osallistumisaktiivisuutta, tukiharjoitusten tekemisen vaikutusta kurssin päättöarvosanaan sekä opiskelijoiden kokemuksia tukiharjoituksista ja -materiaaleista. Opiskelijat suorittivat perustaitotestin yliopistomatematiikan opintojen aluksi. Testin tuloksen perusteella opiskelijat pystyivät tarkastelemaan, milloin heidän ainakin kannattaisi osallistua tukiharjoituksiin tai tehdä tukimateriaaleja verkossa.

Tukiharjoituksiin osallistui hieman enemmän perustaitotestissä alle keskiarvon kuin yli keskiarvon verran pisteitä saaneita. Tukiharjoituksiin osallistumisella oli positiivinen vaikutus kurssin hyväksytysti suorittamiseen. Opiskelijat myös kokivat tukiharjoituksiin osallistumisen hyödylliseksi ja tukimateriaalit pääpiirteittäin erittäin hyviksi.

Avainsanat: matematiikka, siirtymävaihe, tukimateriaali, propositiologiikka, kertaus

ABSTRACT

Anniina Myötyri: Supporting of the Learning of Mathematics in the Beginning of University Studies, Engineering Mathematics 1 and the Learning Curve of the Propositional Logic as an Example
Master of Science Thesis
Tampere University
Master's Degree Programme in Science and Engineering
January 2020

In this thesis the transition from upper secondary school mathematics to university mathematics and the role of revision as a support for learning are examined. This transitional period often presents a challenge to students and many universities have aimed to alleviate the transition with several support measures. As the newest support measure, supporting material and exercises are being tested at Tampere University in the academic year 2019–2020.

The supporting material is mostly composed of revision of the upper secondary school advanced mathematics syllabus. The material contains sets of exercises and links to video material. The supporting material is targeted to students taking Engineering Mathematics. Engineering Mathematics in this context refers to the first mathematics courses taken by students at Tampere University in their studies towards the Bachelor of Science in Technology degree. In this thesis focus is placed on supporting material realised for the course Engineering Mathematics 1.

In the beginning of each exercise set a theory part with the relevant information for solving the exercises is provided. The exercise set is realised electronically as automatically graded STACK-exercises, so the material can be fully accessed and completed online. In addition, students are given the opportunity to attend weekly support sessions, where they can solve the exercises.

Two implementations of the support sessions are held. In the first implementation, theory is lectured in the beginning of the session whereas in the second implementation student familiarize with the theory as they proceed with the exercises. In both implementations it is possible to ask the instructor for advice.

The support material is divided into weekly topics based on the relevance of the material for the corresponding week's Engineering Mathematics 1 lecture topics. This way students can revise the material required as preliminary knowledge for understanding the lecture material, and can more easily connect new information with existing knowledge. The importance of revision and linking old and new information are demonstrated in this thesis by investigation of one possible learning curve of propositional logic, the topic of Engineering Mathematics 1. The learning curve starts from propositional logic in upper secondary school and proceeds to the Boolean satisfiability problem (SAT).

In addition, student activity in attending support sessions, the effect of completed supporting exercises on the received course grade and student experiences regarding the supporting material and sessions are investigated. The students have completed a test evaluating their basic knowledge level in the beginning of their university mathematics studies. Based on test results, students could consider whether or not they should attend support sessions or complete supporting exercises online.

More students scoring less than the average score from the basic knowledge level test attended support sessions, than students scoring above the average. Attending the support sessions had a positive effect on passing the course. Students also experienced attending the sessions as being useful and the support material as being mainly very good.

Keywords: Mathematics, Transition, Support material, Propositional Logic, Rehearsing

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen yliopiston matematiikan laboratoriolle. Kesällä 2019 aloitin tutkimusapulaisena ja suunnittelin työssä esitellyt tukimateriaalit yhdessä Jaakko Tervosen kanssa. Tukimateriaalien suunnittelu apuna olivat myös Insinöörimatematiikka -kurssien luennoitsijat. Diplomityön kirjoitusprosessi ja tutkimustulosten analysointi toteutettiin kesän ja syksyn aikana.

Diplomityöni aihe oli minulle varsin mieleinen. Diplomityön ja sen yhteydessä tehtyjen tukimateriaalien tekeminen sekä tukiharjoitusten ohjaajana toimiminen ovat varmasti hyödyllisiä myös tulevaisuuden kannalta. Haluan kiittää matematiikan laboratoriota ja erityisesti ohjaajaani yliopistonlehtori Riikka Kangaslampea mahdollisuudesta työtekoon minulle mieleisen aiheen parissa. Riikkaa ja yliopisto-opettaja Raine Rönnholmia haluan kiittää työni ohjaamisesta sekä johdonmukaisesta ja rakentavasta palautteesta, jota olen työni edetessä saanut teiltä. Lisäksi kiitos kuuluu perheelleni ja ystävilleni, jotka ovat olleet tukenani koko opintojeni ajan.

Tampereella, 27. tammikuuta 2020

Anniina Myötyri

SISÄLLYSLUETTELO

KUVALUETTELO

TAULUKKOLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CNF	Konjunktiivinen normaalimuoto (engl. Conjunctive Normal Form)
DNF	Disjunktiivinen normaalimuoto (engl. Disjunctive Normal Form)
MATLAB	MATrix LABoratory
Moodle	Avoimen lähdekoodin virtuaalinen verkkoympäristö
NP	Vaativuusluokka, jonka ongelmat voidaan ratkaista epädeterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa.
PDF	Portable Document Format
SAT	Propositiologiikan toteutuvuusongelma (engl. Boolean SATisfiability problem)
STACK	System for Teaching and Assessment using Computer algebra Kernel
TAU	Tampereen yliopisto (engl. Tampere University)
TTY	Tampereen teknillinen yliopisto
TUNI	Tampereen korkeakouluyhteisö (engl. Tampere Universities)
URL	Verkkosivun osoite (engl. Uniform Resource Locator)

1 JOHDANTO

Siirtymävaihe lukio- ja yliopistomatematiikan välillä on monille opiskelijoille haastava. Sen vuoksi yliopistomatematiikan opiskelun aloittamista on tuettu monin tavoin. Uusimpana tukimuotona Tampereen yliopistossa otettiin syksyllä 2019 käyttöön tukimateriaalit ja -harjoitukset. Tukimateriaalit on toteutettu tämän työn yhteydessä. Niiden tekijänä on tämän työn kirjoittajan lisäksi ollut Jaakko Tervonen. Suunnittelu apuna ovat myös olleet Tampereen yliopiston Insinöörimatematiikka -kurssien luennoitsijat, sillä tukimateriaalit ja -harjoitukset on suunnattu juuri kyseisten kurssien opiskelijoille. Insinöörimatematiikalla tarkoitetaan Tampereen yliopistossa tekniikan kandidaattitutkinnon ensimmäisen vuoden matematiikan peruskursseja. Tässä työssä tutkitaan tarkemmin Insinöörimatematiikka 1 -kurssin tukimateriaaleja ja -harjoituksia.

Lisäksi työssä tarkastellaan lähemmin yhtä Insinöörimatematiikka 1 -kurssin aihetta, propositiologiikkaa. Sen avulla havainnollistetaan matemaattisen osaamisen kehittymistä lukio- ja yliopisto-opintojen aikana. Propositiologiikan kehityskaarta analysoitaessa huomataan, että kertaaminen on oppimisen kannalta todella tärkeää, koska ilman riittäviä esitietoja on mahdoton rakentaa riittäviä yhteyksiä aiemmin opittujen asioiden välille. Sidosteisuuden rakentaminen aiemmin opitun ja uuden asian välille on oppimisen kannalta tärkeää, koska tällöin on helpompi ymmärtää oppimaansa, eikä tarvitse tukeutua opettelemaan ulkoa yksittäisiä irrallisia asioita, joiden pysyvästi oppiminen on tällä tavoin lähes mahdotonta.

Tukimateriaalien tarkoituksena on kerrata lukion pitkää matematiikkaa ja näin ollen antaa riittävät esitiedot Insinöörimatematiikka 1 -kurssin suorittamiseen. Tukimateriaalit koostuvat tehtäväsarjoista, joiden alussa on lyhyt teoria tehtäväsarjan aiheesta, ja linkeistä opetusvideoihin. Tukimateriaalit ovat jaettu viikoittaisiin aihepiireihin, jotka noudattelevat Insinöörimatematiikka 1 -kurssin aiheita. Tukimateriaalit ovat toteutettu sähköiseen oppimisympäristöön, Moodleen. Niiden katsominen ja tekeminen onnistuu siis täysin verkossa. Tehtäväsarjat sisältävät sähköisiä, automaattitarkastettavia STACK-tehtäviä, joista opiskelijan on mahdollista saada ratkaisuunsa välitöntä palautetta. Palaute kertoo, onko tehtävä oikein vai väärin ja antaa tarvittaessa myös joitakin tehtävän tekemistä edistäviä vihjeitä. Vaikka tehtäväsarjojen tekeminen onnistuukin täysin verkossa, voi niitä tulla tekemään myös tukiharjoituksiin.

Tukilaskuharjoituksissa käydään aluksi yhteisesti läpi kyseisen viikon tehtäväsarjojen tekoon vaadittu teoria, jonka jälkeen opiskelijat saavat laskea tehtäviä itsenäisesti tai ryhmissä. Tarvittaessa opiskelijat voivat myös kysyä apua harjoitusten ohjaajalta. Harjoitusten ilmapiirin on tärkeä olla sellainen, että opiskelijat uskaltavat kysyä. Laskuharjoitustilaisuuden ohjaaja voi myös omalla aktiivisuudellaan vaikuttaa siihen, että kaikki opiskelijat saisivat riittävästi apua tehtävien tekemiseen, vaikka eivät sitä aina uskaltaisikaan kysyä.

Työssä tutkitaan opiskelijoiden kokemuksia tukimateriaaleista ja -harjoituksista sekä tukiharjoituksiin osallistumisen vaikutusta kurssin päättöarvosanaan. Opiskelijoiden kokemusten tutkimiseen käytettiin kyselylomaketta. Kyselyyn vastasi kurssin rinnakkaisten toteutusten, Insinöörimatematiikka B1 ja C1, tukiharjoituksiin osallistuneita opiskelijoita. Kyselyn perusteella suurin osa opiskelijoista koki tukiharjoitusten auttaneen Insinöörimatematiikka 1 -kurssin kyseisen aihepiirin asioiden ymmärtämisessä. Suurin osa oli myös tyytyväisiä tehtäviin ja tehtäväkohtaisiin vihjeisiin. Yhteinen teoriaosuus koettiin hyödylliseksi, mutta tehtäväsarjan alussa olleen teorian hyödyllisyys jakoi mielipiteitä. Myös opetusvideoiden katseluaktiivisuudessa oli huomattava ero Insinöörimatematiikka B1 ja Insinöörimatematiikka C1 -kurssien opiskelijoiden välillä. Insinöörimatematiikka B1 -kurssin opiskelijat pitivät tehtäväsarjan alun teoriaa hyödyllisenä, mutta eivät juurikaan katsoneet opetusvideoita, kun taas Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijat katsoivat opetusvideoita, mutta eivät pitäneet tehtäväsarjojen alun teoriaosuutta kovinkaan hyödyllisenä.

Tukiharjoitusten hyödyllisyyttä arvioitiin myös kurssin päättöarvosanojen ja perustaitotestin tulosten avulla. Niistä saatujen tulosten perusteella perustaitotestin suorittaneet ja tukiharjoituksiin osallistuneet saivat kurssista useammin hyväksytyn arvosanan kuin ne, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin.

Työn Luvussa 2 käsitellään siirtymävaihetta toisen asteen matematiikan ja yliopistomatematiikan välillä. Siinä kerrotaan siirtymävaiheeseen liittyvistä haasteista. Lisäksi luvussa tarkastellaan, minkälaisia tukitoimia siirtymävaiheen helpottamiseksi on tehty. Luvussa 3 tarkastellaan kertaamista oppimisen tukena. Aiemmin opittujen asioiden kertaamiselle on monia pedagogisia ja didaktisia perusteita, kuten matemaattisen ajattelun tavat sekä erilaiset oppimiskäsitykset ja -strategiat. Lisäksi Luvussa 3 käsitellään Insinöörimatematiikka 1 -kurssin tukimateriaalipaketin sisältöä ja tukiharjoitustilaisuutta. Luvussa 4 tarkastellaan propositiologiikan kehityskaarta lukion propositiologiikasta SAT-ongelmaan. Luvussa 5 puolestaan kerrotaan tarkemmin tukimateriaaleihin ja -harjoituksiin liittyvistä tutkimustuloksista.

2 SIIRTYMÄVAIHE TOISEN ASTEEN KOULUTUKSESTA YLIOPISTOON

Lukion tulee antaa yleiset jatko-opintovalmiudet lukion oppimäärään perustuvaan ammatilliseen koulutukseen, ammattikorkeakouluihin ja yliopistoihin. [22] Länsimaissa on kuitenkin havaittu, että yliopistoon tulevien opiskelijoiden matemaattiset taidot ovat huonontuneet viime vuosikymmeninä. [29] Myös monessa muussa yliopistossa eri puolilla maailmaa on tehty vastaava havainto. [24] Yhä useammissa maissa myös insinööritieteiden tutkijoiden matemaattisen kyvykkyyden heikkeneminen on suuri huolenaihe. [29] Toisen asteen matematiikan ja yliopistomatematiikan opiskelun välistä siirtymävaihetta on myös tutkittu useissa eri maissa. Siirtymävaiheeseen liittyy monia, eri syistä aiheutuvia, haasteita, jotka aiheuttavat usein vaikeuksia yliopistomatematiikan opintojen alussa. Tämän vuoksi yliopistot ovatkin tehneet erilaisia tukitoimia yliopistomatematiikan opiskelun aloittamisen tukemiseksi. [10, 13, 24]

2.1 Siirtymävaiheen haasteita matematiikassa

Toisen asteen ja yliopiston matematiikan välistä siirtymävaihetta vaikeuttavat useat eri asiat. Syitä voi olla muun muassa matemaattisen osaamisen eri osa-alueiden puutteellinen hallitseminen, lukiomatematiikassa tapahtuneet muutokset, erilaiset oppimateriaalit, muutokset tarvittavan matemaattisen ajattelun määrässä, opiskelijoiden väliset suuret tasoerot, opetus- ja oppimistyylin muuttuminen sekä toisen ja kolmannen asteen opettajien liian vähäinen vuoropuhelu. [10, 13, 24]

Matemaattisella osaamisella on useita puolia, joiden merkitystä painotetaan eri tavoin lukiossa ja yliopistossa. Matemaattinen osaaminen voidaan jakaa viiteen osa-alueeseen: käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja yrittelijäisyys. Käsitteelliseen ymmärtämiseen sisältyvät matemaattisten käsitteiden, relaatioiden ja operaatioiden ymmärtäminen. Opiskelija, jonka käsitteellinen ymmärtäminen on hyvällä tasolla, ymmärtää, kuinka uudet käsitteet voidaan liittää hänen hyvin järjestäytyneeseen tietorakenteeseensa, miten eri käsitteet ovat liitoksissa toisiinsa ja missä yhteydessä tietty matemaattinen käsite on käyttökelpoinen. Hän myös tietää enemmän kuin yksittäisiä toisistaan irrallisia faktoja ja menetelmiä. [13]

Proseduraaliseen sujuvuuteen sisältyvät proseduurien tarkoituksenmukainen, tehokas, joustava ja huolellinen käyttö. [13] Proseduureilla tarkoitetaan esimerkiksi funktioiden integrointi- ja derivointimenetelmiä sekä yhtälöiden ratkaisumenetelmiä. [30] Strategiseen kompetenssiin kuuluu kyky esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia sekä muodostaa niistä esimerkiksi yhtälöitä tai lausekkeita. Mukautuva päättely sisältää kyvyn loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen. Yritteliäisyys puolestaan sisältää kyvyn matematiikan näkemiseen luontaisesti järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana. Yritteliäisyyteen kuuluu lisäksi usko ahkeruuden merkityksestä ja omista kyvyistä. Kaikki viisi osa-aluetta ovat jollakin tavalla liitoksissa toisiinsa, eikä rajanveto niiden välillä ole kovinkaan selkeä. [13]

Lukio- ja yliopistomatematiikan luonteissa on eroavaisuuksia. Lukiomatematiikassa keskitytään erityisesti käsitteelliseen ymmärtämiseen. Opiskelijaa ohjataan matemaattisten käsitteiden ymmärtämiseen ja niiden liittämiseen laajempiin kokonaisuuksiin. Lisäksi lukiossa pyritään matematiikan prosenduraaliseen sujuvuuteen ja strategiseen kompetenssiin. [22] Monien lukio-opettajien mielestä lukiolaiset eivät kuitenkaan hallitse tarvittavia algebraan liittyviä perusrutiineja, kuten supistaminen, neliöjuuren ottaminen, integroiminen ja derivoiminen. [30] Opiskelijat käyttävät lukiossa myös entistä vähemmän aikaa matematiikan opiskelemiseen. Tämän vuoksi proseduraalinen sujuvuus kehittyy heikosti ja algebran perusrutiinit ovat heikosti osattuja. Opiskelijat tukeutuvat lukiossa sähköisiin ohjelmistoihin, taulukkokirjoihin ja graafisiin laskimiin, mikä edelleen edes auttaa sitä, ettei proseduraalinen sujuvuus kehity eikä algebran perusrutiineja osata. [31]

Yliopiston matematiikan opiskelun aloittaminen helpottuu, jos osaa algebran perusrutiinit, koska niitä tarvitsee heti ensimmäisellä yliopiston matematiikan kurssilla. [34] Yliopistomatematiikassa pääpainona onkin proseduurien harjoittelu ja teorioiden muodostus [13]. Tampereen yliopistossa opiskelijoille tehty tukimateriaalipaketti kehittääkin etenkin opiskelijoiden lukiomatematiikan prosenduraalista sujuvuutta, johon lukeutuu myös algebran perusrutiinit. Proseduraalisen sujuvuuden kehittyminen helpottaa yliopistomatematiikan kurssien asioiden ymmärtämistä ja nopeuttaa mahdollisesti tehtävien tekemistä, koska aikaa ei mene niin paljon tiettyjen algebran perusrutiinien kertaamiseen.

Käsitteellinen ymmärtäminen ja strateginen kompetenssi ovat myös tärkeä osa yliopistomatematiikaa. Niitä pyritään kehittämään myös lukio-opintojen aikana, mutta kehitys ei useinkaan ole riittävää jatko-opintojen kannalta. [22, 31] Viime vuosina opiskelijakeskeisillä opetustavoilla on pyritty helpottamaan matematiikan käsitteellistä ymmärtämistä yliopistossa. Opiskelijakeskeiset opetustavat ovat pitäneet sisällään muun muassa kysely- ja ongelmalähtöistä oppimista. Niiden tarkoituksena on ollut korostaa yhteistoiminnallisuutta, päätelmien esittämistä ja oppimistaitojen kehittämistä. Lisäksi yksi laajalti käytetty opiskelijakeskeinen lähestymistapa on ollut käänteinen luokkahuone (engl. flipped classroom) tai käänteinen opetus (engl. flipped learning). Näissä opetustavoissa opiskelijat perehtyvät ennen opetustilaisuuksia uuteen aiheeseen videoiden ja muiden materiaalien avulla. Tällöin opetustilaisuudessa aika käytetään keskusteluun ja yhteistoiminnalliseen ongelmanratkaisuun. Lisäksi käänteisen luokkahuoneen ja opetuksen yhteydessä voi käyttää muitakin vuorovaikutteisia opetustapoja, jotka voivat toimia myös itsenäisesti.

Esimerkiksi voi käyttää vertaisopetusta tai opetusta, jossa käydään läpi vain opiskelijalta puuttuvat tiedot, eikä sellaisia asioita, jotka opiskelija osaa jo (engl. Just-In-Time Teaching). [25]

Ongelmanratkaisutehtävissä tarvitsee strategista kompetenssia. Ongelmanratkaisutehtäviä, joissa opiskelijan täytyisi osata muuttaa ongelma ratkaistavaan muotoon ja valittava ratkaisustrategia, ei kuitenkaan yleensä esiinny lukion kursseilla tai ylioppilaskirjoituksissa. Tämän vuoksi hyvä matematiikan arvosanaan kurssista tai ylioppilaskirjoituksista ei välttämättä tarkoita kehittynyttä strategista kompetenssia. [30]

Yliopistomatematiikkaan kuuluu myös tulosten täsmällinen todistaminen. [13] Todistaminen on monille lukiolaisille hyvin vieras aihe, koska ainoa todistamista enemmän käsittelevä kurssi kuuluu valtakunnallisiin syventäviin kursseihin, eikä sen suorittaminen näin ollen ole pakollista. Tämän lisäksi yksittäisiä todistuksia saatetaan käydä läpi muilla matematiikan kursseilla, mutta useinkaan ne eivät ole edellytys kyseisten kurssien läpipääsylle, joten todistustekniikoiden oppiminen lukiossa ei ole välttämätöntä. Lukiomatematiikka keskittyy myös enemmän arkipäivän ilmiöihin ja niihin liittyviin ongelmiin sekä laskemiseen lukuja käyttäen. [22] Tämän vuoksi yliopistomatematiikka voi olla hyvin paljon lukiomatematiikkaa abstraktimpaa.

Lukio-opetuksessa on viime aikoina alettu entistä enemmän hyödyntää erilaisia apuvälineitä, kuten laskinta, taulukkokirjaa ja sittemmin myös lukuisia sähköisiä ohjelmistoja. Tämä voi johtaa muun muassa matemaattisen ajattelun heikkenemiseen. [24] Opiskelijoiden väliset tasoerot kasvavat jo lukio-opintojen aikana melko suuriksi. Yhtenä selittävänä tekijänä on lukiossa opiskeltujen matematiikan kurssien määrä ja niistä saadut arvosanat. Lukiossa voi opiskella hyvin erilaisia määriä matematiikan kursseja. Esimerkiksi voi opiskella ainoastaan pitkän matematiikan pakolliset kurssit tai lyhyttä matematiikkaa. Tämä aiheuttaa tasoeroja lukiolaisten matematiikan taitotasossa. Tämän lisäksi jonkin verran tasoeroihin vaikuttaa opiskelijan sukupuoli. Useimmissa tapauksissa miehet ovat taitotasoltaan naisia parempia lukion päättyessä. Lisäksi tasoeroon vaikuttaa opiskelijoiden vanhempien koulutustausta. Lukion aikana vanhempien koulutustausta ei kuitenkaan enää kasvata tasoeroa, vaan ero on syntynyt jo aiempien kouluvuosien aikana. Ei-ylioppilasvanhempien lapset ovat useimmiten taitotasoltaan heikompia kuin ylioppilasvanhempien lapset. [20]

Toisen ja kolmannen asteen opettajilla ei ole selkeää käsitystä toistensa siirtymävaiheeseen liittyvistä näkökulmista. [10] Esimerkiksi lukioiden ja tekniikan alan oppilaitosten vuoropuhelu matematiikan kurssisisällöistä ja oppimistavoitteista on liian vähäistä. [24] Toisen ja kolmannen asteen välisen yhteistyön parantaminen voisi osaltaan helpottaa siirtymävaihetta. [10] Seuraavassa alaluvussa havainnollistetaan siirtymävaiheeseen liittyviä opettajien näkemyseroja.

2.2 Siirtymävaihe opettajien näkökulmasta

Uudessa-Seelannissa tehdyssä tutkimuksessa [10] tutkittiin toisen ja kolmannen asteen opettajien mielipiteitä siitä, onko toisen asteen ja kolmannen asteen matematiikan opetuksen välillä eroavaisuuksia arvioinnissa, opetustyylissä, opetusresursseissa, opetuksen painopisteessä, teknologian käytössä, opettajien valmiuksissa ja opiskelijoiden kokemuksissa. Tutkimukseen vastasi 178 toisen ja 26 kolmannen asteen opettajaa. [10] Vaikka tutkimus on toteutettu Uudessa-Seelannissa, siirtymävaiheeseen liittyvät ongelmat ovat läsnä myös Euroopassa, joten siinä mainitut ongelmakohdat on syytä ottaa huomioon.

Toisen asteen opettajien vastausten yleinen linja oli, että jokaisella eri osa-alueella vain alle kymmenen prosentin mielestä opetuksessa ei ollut lainkaan eroja eri asteiden välillä. Yli kolmenkymmentä prosenttia toisen asteen opettajista oli sitä mieltä, että opetuksessa on eroja arvioinnissa, opetustyylissä ja opiskelijan kokemuksissa. Opetustyylin kohdalla yli puolet toisen asteen opettajista oli sitä mieltä, että opetustyylissä on eroa eri asteiden välillä. Yleisimmäksi vastaukseksi jokaiseen kohtaan osoittautui 'en tiedä' -vaihtoehto. Kolmannen asteen opettajista yli 50 prosenttia oli sitä mieltä, että arvioinnissa, opetustyylissä, opetuksen painopisteessä ja teknologian käytössä oli eroja. Myös muihin osa-alueisiin oli vastattu vähintään yli 38 prosenttia. Alle kymmenen prosenttia kolmannen asteen opettajista oli sitä mieltä, että arvioinnissa ei ole eroa eri asteiden välillä. Muissa osa-alueissa yli 30 prosenttia oli sitä mieltä, että eroja ei ole. Kolmannen asteen opettajista 'en tiedä' -vastausvaihtoehdon valitsi useimmissa osa-alueissa vain hyvin harva. [10]

Toisen asteen opettajilta kysyttiin myös, miten siirtymän sujuvuutta voisi parantaa. Siihen saatiin vastaukseksi, että toisella asteella opiskelijoiden tulisi saada parempia arvosanoja ilman, että oppiminen muuttuisi pinnallisemmaksi. Opiskelijan itsekuri oppimisessa ja akateemisiin saavutuksiin pyrkiminen voisivat vähentää siirtymävaiheen ongelmia. Myös opetuksen tasolla ja riittävän yksilöllisen tuen puuttumisella ajateltiin olevan vaikutusta siirtymävaiheeseen. Lisäksi osa toisen asteen opettajista ajatteli, että opiskelijan luottamus omaan osaamiseen vaikutti siirtymävaiheeseen. [10]

Luento-opiskelun ajateltiin olevan liian pinnallista aiheen opiskelua, jos opiskelijat päätyvät vain kopioimaan luennoitsijan kertomia asioita. Kolmannen asteen opettajat ehdottivat ratkaisuksi suppeampia kursseja, joissa painotetaan enemmän ongelmanratkaisua ja odotetaan, että opiskelijat ottavat vastuun omasta oppimisestaan eikä painosteta opiskelijoita oppimaan ja selviytymään opetustyylin ja henkilökohtaiseen vastuuseen liittyvistä muutoksista heti. [10]

Toisen ja kolmannen asteen opettajat kokivat hyvin eri tavalla laskennan tarpeellisuuden. Kolmannen asteen opettajien mielestä sen tarve yhteiskunnassa on vähäinen. Monet toisen asteen opettajat olivat asiasta päinvastaista mieltä. He myös uskoivat, että laskentaa opetetaan eri tavalla eri asteilla. Osa kolmannen asteen opettajista yhtyi tähän mielipiteeseen. Toisen asteen opettajat kokivat kehottavansa opiskelijoita opiskelemaan matematiikkaa myös koulun tai kurssin ulkopuolella useammin kuin kolmannen asteen opettajat. Lisäksi he kokivat opiskelijoiden omaavan hyvät valmiudet matematiikan opiskeluun koulun tai kurssin ulkopuolella useammin kuin kolmannen asteen opettajat. Eriävät mielipiteet toisen ja kolmannen asteen opettajien välillä viestivät tarpeesta lisätä opettajien tietämystä eri asteiden perusvaatimuksista. [10]

2.3 Yliopistojen tukitoimet matematiikan opintojen alussa

Suurin osa lukion oppimäärän suorittaneista opiskelijoista jatkaa opintoja joko yliopistossa tai ammattikorkeakoulussa. Opiskelijoiden hakeutuminen teknisten tieteiden pariin on lisääntynyt. Kaikilla teknisille aloille ja matematiikkaa opiskelemaan hakeneilla matemaattiset taidot eivät kuitenkaan ole riittävällä tasolla kyseisten koulutusohjelmien suorittamiseksi. [31] Useat yliopistot ympäri maailmaa ovat tehneet toimenpiteitä matematiikan osaamisen parantamiseksi. Yleisimpiin toimenpiteisiin lukeutuvat kurssien keventäminen ja mukauttaminen sopivaksi opiskelijan taitotasoon nähden sekä matematiikan tukikeskusten perustaminen. [24]

Lukio- ja yliopistokoulutuksen siirtymävaihetta helpottaakseen yliopisto-opiskelun aloittamista on tuettu suomalaisissa yliopistoissa paljon erilaisten toimenpiteiden avulla. Seuraavaksi esitellään kolmen, matematiikan opetuksen kehitysprojekteistaan myös tutkimusta tehneen, suomalaisen yliopiston tekemiä tukitoimia. Lisäksi kerrotaan myös yhden tanskalaisen yliopiston tukitoimista.

2.3.1 Tampereen yliopisto

Nykyinen Tampereen yliopisto ja sen edeltäjät Tampereen teknillinen yliopisto ja entinen Tampereen yliopisto ovat pyrkineet vastaamaan tarpeeseen tukea yliopistomatematiikan opiskelun aloittavia, jotta yliopiston ja toisen asteen koulutuksen välille ei jäisi niin suurta kuilua. Tukikeinoina ovat olleet perustaitotesti, matematiikkajumppa, opiskelijoiden profilointi, tietotekniikka-avusteiset järjestelyt, matematiikkaklinikka, laskutupa ja matematiikan kielentäminen. Edellä mainittujen tukikeinojen avulla on pyritty oppimisvaikeuksien ja erilaisten oppijoiden tunnistamiseen, opetuksen rakenteiden kehittämiseen, jotta ne vastaisivat entistä paremmin erilaisten oppijoiden tarpeita, sekä matematiikan osaamista tukevien opetusmenetelmien kehittämiseen. [30] Lisäksi useimmat tukitoimet painottavat lukiomatematiikan kertaamista ja proseduraalisen sujuvuuden parantamista. [24]

Lukuvuoteen 2018–2019 asti yliopistomatematiikan opiskelun aloittaneet opiskelijat tekivät opintojen aluksi perustaitotestin ja sen yhteydessä olevan kyselyn, jonka perusteella opiskelijat voitiin profiloida. Perustaitotesti mittasi matematiikan proseduraalista sujuvuutta. Osa opiskelijoista ohjattiin testin tulosten perusteella kertaamaan lukiotasoista matematiikkaa matematiikkajumppaan. Perustaitotestin avulla pyrittiin löytämään matematiikan pakollisissa opinnoissa enemmän tukea tarvitsevat opiskelijat. Matematiikkajumpan tavoite oli kehittää lukiomatematiikan proseduraalista sujuvuutta. Se järjestettiin täysin verkko-opetuksena. [30] Lukuvuonna 2019–2020 opiskelijoita kannustetaan edelleen tekemään perustaitotesti oman osaamisen kartoittamiseksi. Se on kuitenkin muutettu vapaaehtoiseksi ja itsediagnostiseksi. Profilointia tai matematiikkajumppaa ei toteuteta enää lukuvuonna 2019–2020. Matematiikkajumpan korvaa pitkälti tässä työssä esitelty tukimateriaalipaketti, jonka avulla opiskelijat voivat kerrata yliopistomatematiikan ensimmäisten kurssien esitietoja, jos ne ovat puutteelliset. Heikon perustaitotestin tuloksen saaneita kehotetaan tukimateriaalipaketin tekemiseen. Tukimateriaalipaketin sisältö esitellään tarkemmin Luvussa 3 ja työn lopussa olevassa Liitteessä A.

Tampereen teknillisen yliopiston tutkimuksen mukaan matematiikan opiskelijat voidaan profiloida viiteen profiiliin: osaajiin, omin päin opiskeleviin, pintasuuntautuneisiin mallista oppijoihin, vertaisoppijoihin ja tukea tarvitseviin. [30] Profilointi tehtiin osana perustaitotestiä vuonna 2004. [23] Opiskelija vastasi perustaitotestin yhteydessä olleeseen kyselyyn, jonka perusteella opiskelijat jaoteltiin viiteen edellä esiteltyyn profiiliin. [30] Profiloinnilla pyrittiin edistämään opetuksen ja opiskelijoiden oppimistaitojen kehittämistä. [23]

Osaajat eivät ulkoa opettele asioita vaan haluavat pyrkiä syvälliseen oppimiseen. Heidän käsityksensä matematiikan opiskelusta ja omista taidosta on positiivisempi kuin missään muussa vaihtoehdossa. Omin päin opiskelevat haluavat opiskella itsenäisesti. He suhtautuvat positiivisesti omaan osaamiseensa, eivätkä suosi ulkolukua, pinnallista opiskelua tai luennoitsijan muistiinpanojen tai tehtävien kopiointia. [30] Pintasuuntautuneet mallista oppijat eivät luota omaan osaamiseensa ja opiskelevat pitkälti kopioimalla tai esimerkkien avulla. He kantavat vastuun omasta oppimisestaan ja kokevat opinnoissa menestymisen olevan kiinni heistä itsestään. Pintasuuntautuneet opiskelijat eivät nimensä mukaisesti pyri kovinkaan syvälliseen oppimiseen. Vertaisoppijoiden ryhmän sosiaalisuus on suurempi kuin muilla ryhmillä. He opiskelevat mielellään ryhmissä ja suhtautuvat positiivisesti matematiikan opiskeluun. He opiskelevat kopioimalla, esimerkkien avulla ja ulkoa lukemalla, mutta pyrkivät myös syvälliseen oppimiseen. [30] Tukea tarvitsevien ryhmä on kaikista epävarmin omasta osaamisestaan, ja he luovuttavat helposti opiskelun suhteen. Heidän asennoitumisensa matematiikan opiskeluun on heikkoa. Opiskelu tapahtuu pitkälti ulkoa lukemalla ja matematiikan kieli koetaan vaikeaksi ymmärtää. [30]

Vuonna 2009 perustetun matematiikkaklinikan avulla pyrittiin tukemaan opinnoissaan tukea tarvitsevia. Sen tavoitteina oli tukea opiskelijoiden proseduraalista sujuvuutta, käsitteellistä ymmärtämistä ja mukautuvan päättelyn kehittymistä. Matematiikkaklinikalla tarjottu tukiopetus kohdistui lähinnä pakollisten matematiikan kurssien laskuharjoitustehtäviin. Matematiikkaklinikka pyrki opiskelijoiden henkilökohtaiseen ohjaamiseen. Ilmapiirin oli matematiikkaklinikalla avoin ja keskusteleva. Siellä opiskelijat pystyivät halutessaan ryhmäytymään toistensa kanssa ja ratkaisemaan tehtäviä yhdessä. Formaalin matematiikan kielen rinnalla käytettiin myös epäformaalia kieltä. Opiskelijoiden ohjauksen lisäksi heitä pyrittiin kannustamaan klinikalla. Tavoitteena oli luoda onnistumisen kehä matematiikan opintoihin antamalla opiskelijoille positiivisia kokemuksia, jotta heidän motivaationsa kasvaisi. Onnistumisen kehällä tarkoitetaan tilannetta, jossa matematiikassa onnistumiset muuttavat opiskelijan asenteita matematiikkaa kohtaan myönteisemmiksi ja kasvattavat itsevarmuutta matematiikan oppijana, joka johtaa yritteliäämpään ja motivoituneempaan matematiikan opiskeluun, joka edelleen johtaa uusien onnistumiskokemusten syntyyn. [30]

Matematiikkaklinikan tukena oli myös TTY-Piiri, joka oli sosiaalinen verkkoyhteisö. TTY-Piirissä pystyi pyytämään apua matematiikan opintoihin. Lisäksi TTY-Piirin avulla pystyttiin tukemaan opiskelijoiden integroitumista opiskelijayhteisöön. Osalle opiskelijoista ensimmäisen syksyn opinnot käynnistyivät hyvin hitaasti, jonka yhdeksi syyksi voitiin ajatella opiskelukavereiden puuttumista. TTY-Piirin avulla opiskelijat pystyivät verkostoitumaan opintojen avulla ja myöhemmin ensimmäisen lukuvuoden aikana he pystyivät TTY-Piirin avulla saamaan matematiikan perusopiskeluun vertaistukea ja muodostamaan erilaisia opiskelupiirejä. [30]

Nykyään matematiikkaklinikan ja TTY-Piirin perinteiden jatkajina toimivat Laskutupa ja Slack-verkkopalvelu. Laskutupa on Tampereen yliopiston Hervannan kampuksella oleva luokkahuone, johon opiskelijat voivat mennä laskemaan matematiikan tehtäviä yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa tai itsenäisesti. Laskutupa on avoinna lähes jokaisena arkipäivänä ja se on suunnattu pääasiassa ensimmäisen vuoden matematiikan kursseja suorittaville Tampereen yliopiston tekniikan kandidaatiksi opiskeleville. Laskutuvassa opiskeleminen on täysin vapaaehtoista. Siellä on sen aukioloaikoina myös ohjaajia, jotka auttavat opiskelijoita tehtävien ratkaisemisessa. Ohjaajia on kahdenlaisia: ’Koutseja’ ja ’Tsemppareita’. Koutsit ovat yleensä tutkimusassistentteja, joilla on kokemusta pedagogiikasta. Tsempparit ovat puolestaan opetusharjoittelijoita, jotka tekevät Laskutuvassa opetusharjoittelua osana pedagogiikkaan liittyviä kurssejaan. Laskutupa tarjoaa siis opetusharjoittelijoille mahdollisuuden kartuttaa opetuskokemuksia ja lisäksi opiskelijoille mahdollisuuden saada apua tehtävien ratkaisemisessa. Koutsit ohjaavat ja antavat palautetta opetusharjoittelijoille sekä neuvovat opiskelijoita tehtävien ratkaisemisessa. Tsempparit puolestaan keskittyvät vain opiskelijoiden auttamiseen tehtävien ratkaisemisessa. Laskutuvassa on tarjolla myös matematiikan kirjallisuutta, tietokoneita ja tauluja opiskelun tueksi. [45]

Lisäksi Laskutuvalla on ollut oma kanavansa Slack-nimisessä verkkopalvelussa. Siellä opiskelijoiden on ollut mahdollista keskustella keskenään tehtävien ratkaisuun liittyvistä ongelmista kuvien ja viestien avulla. Myös Koutsin on ollut mahdollista vastata Slack:ssa esitettyihin kysymyksiin. [45]

Tampereen yliopiston keskustan kampuksella on myös Laskutuvan kanssa hyvin samalla tavoin toimivat matematiikan ja tilastotieteen työpajat, joissa voi niiden aukioloaikoina laskea matematiikan kandidaattitutkinnon pakollisten matematiikan kurssien tehtäviä ja tarvittaessa kysyä neuvoa työpajojen ohjaajilta. Työpajat on suunnattu ensisijaisesti ensimmäisen vuoden matematiikan opintoja suorittaville. [42]

Oppimisen tukena on kokeiltu myös matematiikan kielentämistä. Matematiikan kielentämisen tavoitteena on käsitteellisen ymmärtämisen ja strategisen kompetenssin kehittyminen. Kielentäessä opiskelijan täytyy jäsennellä omia ajatuksiaan ja pukea ne selkeästi sanoiksi. Tämä auttaa myös vertaisryhmää omien ajatusten reflektoinnissa. Kielentäminen kehittää argumentointitaitoja vuorovaikutuksellisissa tilanteissa. Myös opettaja hyötyy siitä, että opiskelijat kielentävät tehtäviä, koska se helpottaa oppimisen arviointia ja opetustilanteiden suunnittelua. [30]

Kielentämiskokeilu toteutettiin syksyllä 2010. Kokeiluun osallistuivat Laaja Matematiikka 1 -kurssin ryhmä ja yksi Insinöörimatematiikka 1 -kurssin ryhmä. Heille annettiin kielentämistehtäviä ratkaistavaksi laskuharjoitusten yhteydessä. Opiskelijat selittivät luonnollista kieltä käyttäen heille annetut kielentämistehtävät. Tehtävä käytiin laskuharjoituksissa läpi. Siellä opiskelija kirjasi luonnollisella kielellä perustelunsa taululle tai sitten opettaja poimi tärkeimmät asiat opiskelijan puheesta kalvolle. Tämän lisäksi Laajan matematiikan opiskelijat palauttivat vastauksensa kirjallisina luennoitsijalle. Enemmistö kokeiluun osallistuneita koki kielentämisen hyvänä asiana. Negatiivisesti asiaan suhtautuneet pitivät kielentämistä useimmiten liian työläänä ja vaikeana. Kielentämistehtäviin myönteisemmin suhtautuivat Laajan matematiikan opiskelijat kuin Insinöörimatematiikan opiskelijat. [30]

Yliopisto-opintojen alkuvaiheen matematiikan kursseilla on otettu käyttöön yhä enemmän tietotekniikka-avusteisia harjoitustehtäviä. Ne pyrkivät sekä tukemaan opiskelijoiden tehtävien tekoa että modernisoimaan yliopisto-opetusta. Sähköisten tehtäviä pystyy satunnaistamaan, jolloin jokainen opiskelija voi saada hieman erilaisen tehtävän ratkaistavakseen. Opiskelija saa ratkaisustaan välitöntä palautetta. Palaute voi olla ratkaisuprosessia ohjaavaa. Järjestelmän avulla pystytään analysoimaan opiskelijan ratkaisuyrityksiä ja havaitsemaan tavallisimpia virheitä, jolloin opiskelijalle pystytään kertomaan, missä kohtaa ratkaisussa on virhe. Sähköisten tehtävien tekeminen ei myöskään vaadi opiskelijalta läsnäoloa tietyssä paikassa tiettyyn aikaan, mikä voi helpottaa joidenkin opiskelijoiden opiskelua huomattavasti. Useimmiten sähköiset tehtävät keskittyvät ennen kaikkea perusasioiden ja laskurutiinin omaksumiseen, sillä vaativammat matemaattiset asiat vaativat usein opettajan läsnäoloa. [24]

Sähköiset tehtävät voivat olla apuna myös kurssien jatkuvassa arvioinnissa. Jatkuvalla arvioinnilla pyritään saamaan opiskelijat työskentelemään koko kurssin ajan tasaisesti. Perinteinen tentteihin pohjaava arviointi aiheuttaa usein sen, että opiskelija keskittyy juuri ennen tenttiä aloitettuun pänttäämiseen, joka voi johtaa hyvin pintasuuntautuneisiin oppimistuloksiin. Perinteisten laskuharjoitusten jatkuva arviointi ei ole niin kannattavaa, jos niistä saatavalla hyvityksellä on suuri painoarvo kurssin kokonaisarvosanassa, koska kotitehtäväksi annettujen laskuharjoitusten kopioiminen on tällöin erittäin houkuttelevaa. Satunnaistettujen sähköisten tehtävien avulla jatkuvan arviointi onnistuu paremmin ja saa useimmiten opiskelijat keskustelemaan ratkaisumenetelmistään ja tehtävien yleisistä ideoista, jolloin heidän välisensä yhteistyö on huomattavasti rakentavampaa kuin perinteisten laskuharjoitusten yhteydessä. Sähköiset järjestelmät mahdollistavat myös kokonaisten kurssien järjestämisen etänä. [24]

Sähköisten tehtävien toteutuksessa käytettävä STACK-järjestelmä voi proseduraalisten taitojen lisäksi testata ja kehittää myös konseptuaalista ymmärrystä. Matematiikan perusopetus tähtää pääosin nimenomaan proseduraalisten taitojen ja konseptuaalisen ymmärryksen kasvattamiseen. Strateginen kompetenssi jää useimmiten vähemmälle huomiolle. Insinöörialoilla strategisen osaamisen merkitys on kuitenkin suuri. Matemaattisen mallinnuksen opiskelun avulla pyritään kehittämään strategista kompetenssia. Matemaattisen mallin rakentamiseen tarvitaan usein matematiikan lisäksi muiden tieteenalojen asiantuntemusta, sivistyneitä arvauksia, tiedon keräämistä ja käsittelyä sekä testausta. [24]

Uusimpana tukitoimenpidekokeiluna lukuvuonna 2019–2020 aloitettiin ’flippaus’. Flippauksella tarkoitetaan opetusmuotoa, joka yhdistää osia käänteisestä opetus ja käänteinen luokkahuone -opetusmuodoista. Ensimmäiset tulokset kyseisen tukitoimenpiteen vaikutuksista saadaan lukuvuoden jälkeen.

2.3.2 Aalto-yliopisto

Aalto-yliopistossa yliopistomatematiikan aloittamista on tuettu sähköisten tehtävien avulla ja Laskutuvan perustamisella. Sähköisillä tehtävillä on pyritty kehittämään kurssin arviointia. Perinteisen tentteihin pohjaavan arvioinnin sijaan Aalto-yliopiston joillakin matematiikan peruskursseilla on kokeiltu muutaman vuoden ajan jatkuvaa arviointia sähköisten tehtävien avulla. Kokeilu on osoittautunut hyvin menestyksekkääksi. [24]

Aalto-yliopiston Laskutupa on hyvin vastaavanlainen kuin Tampereen yliopiston Laskutupa. Siellä voi laskea matematiikan ja fysiikan peruskurssien laskuharjoituksia. Sinne ei vaadita erillistä ilmoittautumista, vaan sinne voi mennä aina tarvittaessa. Laskutuvassa tehtäviä voi ratkaista yksin tai yhdessä muiden opiskelijoiden kanssa. Lisäksi laskutuvassa on opettaja, joka on useimmiten joko jatko-opiskelija tai lehtori. Häneltä voi kysyä apua, jos tehtävän ratkaisemisessa tai luentomuistiinpanojen ymmärtämisessä ilmenee ongelmia. Laskutuvan tavoitteena on, että opiskelija oikeasti ymmärtäisi, mitä tehtävän ratkaisussa tapahtuu. Ohjausta annetaan myös yleisimpiin kysymyksiin, joihin lukeutuvat esimerkiksi kysymykset: ’Mikä on tehtävän idea?’ ja ’Kuinka tärkeä tehtävä on kurssikokonaisuuden kannalta?’. Laskutupa on vapaasti kaikkien opiskelijoiden käytössä taitotasosta riippumatta ja laskutupa onkin osoittautunut suosituksi opiskelijoiden keskuudessa. Laskutuvan käytöstä kerättyjen tilastojen perusteella on huomattu, että laskutupaa käyttävät eniten opiskelijat, jotka ovat muutenkin aktiivisia ja menestyvät opinnoissaan vähintään kohtuullisesti. [24]

2.3.3 Helsingin yliopisto

Helsingin yliopistossa on käytetty kisällioppimista menetelmänä joillakin matematiikan kursseilla ja tehty siihen liittyvää tutkimusta. Nimitys kisällioppiminen juontaa juurensa käytännön taitojen oppimiseen, jossa oppilas oppii taidon kokeneemmalta mestarilta. [26]

Kisällioppimisen toimintaperiaate on hyvin samankaltainen kuin Laskutupien toimintaperiaate. Myös sen tavoitteena on helpottaa siirtymistä toisen asteen koulutuksesta yliopistokoulutukseen. Lisäksi tavoitteena on opettaa opiskelijoille taitoja, joita he tarvitsevat jatko-opinnoissaan ja työelämässä. [27]

Tehostetun kisällioppimisen menetelmä on kehitetty Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella. Se perustuu kognitiiviseen kisällioppimiseen ja sitä käyttäen voidaan järjestää opetusta kursseilla, joilla on useita satoja opiskelijoita. Sana tehostettu viittaa nimenomaan siihen, että menetelmää toimii suurillakin opiskelija määrillä säilyttäen tavoitteen oppijan yksilöllisestä ohjauksesta.

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos sovelsi kisällioppimismenetelmää ensimmäisen kerran pilottikokeilussa keväällä 2011, joka toteutettiin Logiikka 1 -kurssin yhteydessä. [26] Seuraavana syksynä kisällioppimista kokeiltiin matematiikan peruskursseilla: Lineaarialgebra 1, Lineaarinen algebra 2 ja Matriisit 1. [26, 27] Nykyään kisällioppiminen on käytössä useilla matematiikan peruskursseilla Helsingin yliopistossa. [26]

Yhdessä Helsingin yliopiston tutkimuksessa kisällioppimista verrattiin ennen sitä käytössä olleeseen perinteiseen luentopohjaiseen opetukseen. Tutkimus keskittyi tarkastelemaan, kuinka nämä kaksi menetelmää vaikuttivat opiskelijoiden sitoutumiseen. Tuloksien perusteella kisällioppiminen lisäsi opiskelijoiden sitoutumista ja vaivannäkemistä enemmän kuin perinteinen luentopohjainen opetus. Opiskelijat olivat tyytyväisiä kisällioppimiseen, vaikka opiskelijat joutuivatkin näkemään enemmän vaivaa opiskelun eteen. [27] Jo aiemmin on osoitettu, että opiskelijoiden mielestä kisällioppiminen on sopiva opetusmenetelmä, eikä se laske kurssin läpipääsyprosenttia, vaikka työmäärä lisääntyy ja vaatimustaso nousee. [25]

Helsingin yliopisto on tehnyt aiheesta myös toisen tutkimuksen. Sen tulosten perusteella kisällioppimisen avulla on saatu lisättyä käsitteiden ymmärtämistä, eikä opiskelussa painotu enää niin vahvasti asioiden ulkoa opettelu. [25]

Kisällioppiminen edellyttää opiskelijoiden aktiivista sitoutumista ja valmistautumista jo ennen opetustilaisuutta. Tämän takia siinä on samanlaisia piirteitä kuin aiemmin mainituissa käänteisissä opetusmenetelmissä. Opiskelijoilla ei ole videoita tai luentoja aiheesta, vaan opiskelijat lukevat kurssimateriaaleja ja tekevät tehtäviä huomattavasti enemmän kuin luentopohjaisilla kursseilla. Luentopohjaisilla kursseilla luentoja on 4-5 tuntia viikossa ja kullakin viikolla on 6-7 tehtävää, joiden tarkastus tapahtuu kahden tunnin laskuharjoitustilaisuudessa, jossa käydään oikeat vastaukset läpi. Jokaisessa laskuharjoitustilaisuudessa on noin 20-30 opiskelijaa. [25]

Kisällioppimisessa viikoittaisia luentoja ei ole ja tehtäviä tulee 15-20 jokaisella viikolla. Tehtävät on suunniteltu tukemaan käsitteellistä ymmärtämistä ja auttamaan opiskelijaa rakentamaan suhteita proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon välille. Tehtävät tarjoavat heille pieniä helposti lähestyttäviä tavoitteita. Passiivinen työ, kuten luennoilla istuminen on minimoitu ja keskittyminen on siirretty opiskelijan aktiiviseen toimintaan. Kisällioppimisessa opiskelijat saavat enemmän henkilökohtaista ohjausta kuin perinteisessä luentoopetuksessa. Henkilökohtaisen ohjauksen on noudatettava kognitiivisen kisällioppimisen ajatusta oppijan valmentamisesta ja oikea-aikaisen tuen antamisesta. Oikea-aikaisella tuella pyritään luomaan opiskelijalle edellytykset suoriutua myös tehtävistä, joista hän ei yksin pystyisi selviytymään. [25] Kognitiivisen kisällioppimisen tärkeänä osana on myös se, että opiskelija saa käsityksen tehtävästä sekä siitä, kuinka asiantuntija ajattelee ja toimii. [26]

Opiskelijoiden on tehtävä paljon töitä opetustilaisuuksien ulkopuolella, mutta niissä heille tarjotaan ohjausta juuri niihin asioihin, joihin kukin opiskelija sitä tarvitsee. Lisäksi opiskelijat saavat palautetta tekemistään tehtävistä ja opettajat pystyvät arvioimaan oppimista jo kurssin aikana tarkastaessaan opiskelijoiden tehtäviä ja keskustellessaan opiskelijoiden kanssa. [25]

Vaikka kisällioppimisessa painottuu melko paljon itsenäinen työ, ei opiskelijoiden ole pakko työskennellä yksin. Helsingin yliopistolla matematiikan ja tilastotieteen laitoksen pääkäytävästä on tehty opiskelijoiden työskentelytila. Käytävän varrella on tussi- ja liitutauluja sekä pöytäryhmiksi aseteltuja pöytiä, jotta opiskelijoiden välinen yhteistyö onnistuu. Lisäksi käytävällä kulkee ohjaajia huomioliiveihin pukeutuneina, jotta opiskelijat erottavat helpommin ohjaajan ja pystyvät tarvittaessa kysymään apua. Kurssilla, jolla on noin 300 opiskelijaa, on yleensä seitsemän ohjaajaa ja vastuuopettaja. Myös vastuuopettaja osallistuu ohjaustoimintaan. Ohjaajat ovat haastattelujen kautta valittuja vanhempia opiskelijoita. Ohjaajat päivystävät työskentelytilassa useita tunteja jokaisena arkipäivänä. Heidän ei ole tarkoitus antaa opiskelijoille valmiita ratkaisuja, vaan johdatella opiskelijan ajatusten kulkua sopivien kysymysten avulla, jotta opiskelija voisi itse lopulta oivaltaa tehtävän ratkaisun. Ohjaajien on hyvä myös itse olla aktiivisia auttamaan ja käydä välillä kysymässä, kuinka opiskelijoiden tehtävien tekeminen sujuu, koska kaikki opiskelijat eivät välttämättä uskalla aina kysyä apua, vaikka sitä tarvitsisivatkin. [26]

2.3.4 Aalborgin yliopisto

Aalborgin yliopistossa Tanskassa matematiikan opiskelua on tuettu kehittämällä digitaalista oppimateriaalia, joka on opiskelijalähtöistä, dynaamista ja multimodaalista. Multimodaalisilla oppimateriaaleilla tarkoitetaan sitä, että materiaalit koostuvat erilaisista moodeista, joita ovat esimerkiksi teksti, ääni, kuva ja simulaatio. Digitaalista oppimateriaalia on yhdistetty konstruktionismin ja ongelmalähtöisen oppimisen (engl. problem-based learning) periaatteet. Konstruktivismin mukaan oppimisympäristöjen pitää tukea useiden eri näkökulmien ja tulkintojen saamista todellisuudesta, tiedon rakentumisesta ja jäsentelemisestä sekä kokemusperustaisista toiminnoista. Konstruktivismin mukaan oppiminen on tehokkainta, kun ihmiset toimivat aktiivisina oppijoina ja tekevät myös konkreettisia tuotoksia, esimerkiksi joitakin esineitä. [43]

Ongelmalähtöisellä oppimisella tarkoitetaan opiskelijakeskeistä oppimista, jossa opiskelijoiden oppiminen tapahtuu ongelmanratkaisuprosessin avulla. Opiskelijat oppivat prosessin aikana omien kokemustensa kautta. Ratkaistava ongelma on oltava sopivan haastava, jotta sen ratkaiseminen vaatii uuden tiedon hankkimista ennen ratkaisun onnistumista. Ongelmalähtöisen oppimisen tavoitteena on auttaa opiskelijaa kehittämään tietämystään, jonka soveltaminen eri tilanteissa on mahdollista. Lisäksi tavoitteisiin lukeutuu opiskelijan ongelmanratkaisutaitojen, itseohjautuvan oppimisen, yhteistyötaitojen ja sisäisen motivaation kehittämisen tukeminen. Tavoitteisiin pyritään pääsemään ryhmätöiden tekemisen avulla. Ryhmissä opiskelijat tunnistavat, mitä tietävät jo, mitä heidän tarvitsee vielä tietää ratkaistakseen ongelman sekä miten ja mistä he voivat saada uutta tietoa, jonka avulla ongelma saataisiin ratkaistua. Tällä tavoin he voivat parantaa tietämystään aiheesta ja kehittää samalla viestintä- ja yhteistyötaitoja, kriittistä ajattelua ja itseohjautuvuutta. [43]

Opiskelijat pääsevät toimimaan samantyyppisesti kuin he tulevat toimimaan tulevaisuudessa työelämässä. Opettajan rooli on puolestaan ongelmalähtöisessä oppimisessa enemmän ohjaajan rooli. Opettaja siis seuraa sivusta oppimisprosessia sekä tukee ja ohjaa oppimista tarvittaessa. Aalborgin yliopistossa on sen perustamisesta alkaen käytetty ongelmalähtöistä oppimista kaikissa eri tutkinto-ohjelmissa ja heidän käyttämänsä ongelmalähtöisen oppimisen malli onkin kansainvälisesti ja kansallisesti tunnettu. Sen voidaan sanoa olevan Aalborgin yliopiston tuotemerkki. [43]

Aalborgin yliopiston matematiikan oppimateriaaleja kehitettiin mediateknologian koulutusohjelmassa. Mediateknologian koulutusohjelma koostui opintojaksoista, jotka perustuivat ongelmalähtöiseen oppimiseen. Kurssien tavoitteena on antaa opiskelijoille ammatillisia taitoja. Kurssit suoritetaan tiettynä ajankohtana ja niistä saa opintopisteitä. Kurssi voi sisältää yhden tai useamman kokeen, joka suoritetaan kokeiden suorittamiseen määrättynä ajankohtana. [43]

Matematiikan kurssit suoritetaan mediateknologian koulutusohjelmassa luentoina ja harjoituksina. Aluksi opiskelijat osallistuvat professorin pitämille luennoille. Niiden jälkeen opiskelijat työskentelevät ryhmissä ja ratkaisevat tehtäviä pääasiassa ilman sähköisiä apuvälineitä. Tässä tapauksessa ongelmalähtöistä oppimista tukevat tehtävät ovat tyypillisiä matemaattisia käsin ratkaistavia tehtäviä ja vain joissain tapauksissa sähköisillä apuvälineillä ratkaistavia tehtäviä. Esimerkiksi numeeristen integraalien ja lineaarisen algebran yhteydessä tehtävät palautetaan usein sekä sähköisesti käyttäen esimerkiksi tietokoneohjelma MATLAB:a että käsin paperille ratkaistuna. Harjoituksissa on paikalla kaksi opettajaa, jotka ohjaavat opiskelijoita ratkaisuun pääsemisessä, jos opiskelijat tarvitsevat apua. Lisäksi opintojakson suorittaakseen opiskelijan on läpäistävä henkilökohtainen kirjallinen tentti. [43]

Ongelmalähtöisen oppimisympäristön lisäksi mediateknologian koulutusohjelmassa materiaalien halutaan hyödyntävän myös konstruktivismin periaatteita. Opiskelijoiden halutaan tekevän johtopäätöksiä käytännön tekemisen kautta. Opiskelijoille on myös haluttu ottaa käyttöön uusia oppimistapoja, kuten sähköisillä järjestelmillä tehdyt matemaattiset visualisoinnit. [43]

Visualisointeja on tehty opiskelijoille valmiiksi, mutta lisäksi toivotaan, että opiskelijat luovat omia visualisointeja ratkaistessaan heille annettuja ongelmia. Tärkeänä osana opetusta on ongelmalähtöiseen oppimiseen perustuva ryhmätyö. Opiskelijoiden halutaan olevan aktiivisia toimijoita ryhmätöissä. Opiskelijat kehittävät ryhmätyönä tietokonesovelluksia, joiden kehittäminen vaatii myös matemaattisten käsitteiden oppimista. [43]

3 KERTAAMINEN OPPIMISEN TUKENA

Insinöörimatematiikka -kursseille rakennettujen tukimateriaalien tärkein ajatus on aiemmissa opinnoissa käsiteltyjen asioiden oikea-aikainen kertaaminen uuden tiedon omaksumisen helpottamiseksi. Aiemmin opittujen asioiden kertaamiselle on monia didaktisia ja pedagogisia perusteita. Niihin sisältyy muun muassa matemaattisen ajattelun tavat sekä oppimiskäsitykset ja -strategiat. Tarkastellaan seuraavaksi näitä lähemmin.

3.1 Matemaattisen ajattelun tavat

Matemaattisen ajattelun rakennetta voidaan kuvata monien eri teorioiden avulla. Keskeisimpiin teorioihin kuuluvat hierarkkiset ja dialektiset teoriat. Hierarkkisissa teorioissa käsitellään ymmärtämisen tasoja, jotka pohjautuvat aina edelliseen tasoon ja luovat näin ollen myös kertaamisen tarpeen, jos jonkun tason ajattelu ei ole täysin hallinnassa. Dialektiset teoriat puolestaan viittaavat ymmärtämisprosessiin, jossa objekti- ja prosessitulkinnat vuorottelevat ymmärryksen kasvaessa. Se siis liittyy läheisesti käsitteenmuodostusprosessiin. [13]

Muissa keskeisissä teorioissa ei niinkään oteta kantaa kertaamiseen liittyviin asioihin, joten ne jätetään huomiotta tässä työssä. Kyseiset teoriat luokittelevat matemaattisen ajattelun rakennetta rinnakkaisiin komponentteihin tai historiallis-empiiristen mallien mukaan. Historiallis-empiiriset mallit pohjautuvat historian saatossa olleiden matemaatikkojen tai tiedemiesten ongelmanratkaisumenetelmiin, jotka ovat sovellettavissa myös nykypäivän matematiikan opiskelijan käyttöön. [13]

Tarkastellaan esimerkkinä kahta tärkeää hierarkkista teoriaa ja yhtä dialektista teoriaa, joissa tulee ilmi myös tarve asioiden kertaamiselle. Avitalin ja Shettleworthin hierarkkisen teorian [13] mukaan matemaattinen ajattelu on jaettavissa kolmeen tasoon. Ensimmäinen taso on mieleen palautumisen taso. Sillä tasolla opiskelijan mieleen palautuu asia siinä muodossa, missä se on opiskelijalle aiemmin opetettu. Toinen taso on yleistämisen taso. Sillä tasolla opiskelija yleistää asian ja voi hyödyntää oppimaansa asiaa muiden tehtävien tai sisältöjen yhteydessä. Tasoa voidaan kutsua myös algoritmisen ajattelun tasoksi, sillä opiskelija hyödyntää tällä tasolla aiemmin oppimiaan algoritmeja uudenlaisissa tilanteissa, jotka eivät kuitenkaan eroa liian paljon algoritmin alkuperäisestä oppimiskontekstista. Kolmas on avoimen etsinnän taso, jolla opiskelija voi havaita tehtävien osien välillä uusia riippuvuuksia ja jäsennellä tehtävän osia uuteen järjestykseen. Ennalta opitut ratkaisumallit ja operaatiot eivät ole enää rajoittavina tekijöinä, vaan niitä pystyy soveltamaan. Kukin taso pohjautuu aina sitä edeltävään tasoon, eivätkä tasot näin ollen ole toisistaan irrallisia. [13]

Pirien ja Kierenin hierarkkisen teorian [13] mukaan matemaattisen ajattelun vaiheet on jaettu kahdeksaan sisäkkäiseen tasoon. Tasoja ovat alkeistietämisen, mielikuvan muodostamisen, mielikuvan hallinnan, ominaisuuksien huomioimisen, formalisoinnin, havaitsemisen, jäsentämisen ja keksimisen vaihe. Opiskelija liikkuu näillä tasoilla tarvittaessa edestakaisin, jos ei saa jotakin ongelmaa ratkaistua. [13]

Alkeistietämisen vaiheeseen sisältyy opiskelijan pohjatieto käsitteistä, joita opiskelijan on tarkoitus ymmärtää tai jotka mahdollistavat uuden käsitteen ymmärtämisen. Mielikuvan muodostamisvaiheessa opiskelija muodostaa tietojensa ja konkreettisten objektien avulla uusia yhdistelmiä tiedoistaan. Mielikuvan hallinnan vaiheessa konkreettiset objektit eivät ole enää välttämättömiä, vaan opiskelija kykenee toimimaan symbolisella tasolla. [13] Ominaisuuksien huomioimisen vaiheessa opiskelija pystyy rakentamaan relevantteja, kontekstiin sidottuja ominaisuuksia yhdistelemällä ja manipuloimalla mielikuviensa eri näkökulmia. Formalisoinnin vaiheessa opiskelija ei tarvitse suoraa kiinnekohtaa mielikuviinsa, vaan pystyy toimivaan ainoastaan symboleita käyttämällä. Havaitsemisen vaihe on jatkumo formalisoinnin vaiheelle. Siinä opiskelija havaitsee formalisointivaiheessa muodostuneissa asioissa uusia yleistyksiä, jotka hän pystyy ilmaisemaan matemaattisesti. Lisäksi opiskelija pystyy havaitsemisen vaiheessa reflektoimaan ja koordinoimaan omia käsityksiään uusilla tavoilla. Viimeisessä vaiheessa eli keksimisen vaiheessa opiskelija kykenee irtautumaan kaikista asiaan liittyneistä ennakkokäsityksistä, jotka olisivat esteenä uusien käsitteiden ymmärrykselle ja kysymysten asettelulle. Viimeisellä tasolla opiskelija saavuttaa myös asiakokonaisuuden ymmärtämisen jäsennellysti teoriatasolla. [13]

Sfardin dialektisessa teoriassa [13] yksilön matemaattinen ymmärrysprosessi tapahtuu samalla tavalla kuin matemaattisissa yhteisöissä. Prosessia kutsutaan objektifioinniksi. Siinä matemaattinen idea on syntynyt käsitteellistämällä operaatiot, jotka ovat kohdistuneet alemman abstraktiotason objekteihin, itsenäisiksi objekteiksi. Ymmärrysprosessissa on kolme osaprosessia: sisäistäminen, tiivistäminen ja reifikaatio eli esineellistäminen. Sisäistämisprosessissa alemman abstraktiotason toiminnot tulevat opiskelijalle ymmärrettäviksi. Opiskelija pystyy toteuttamaan toiminnot myös kuvitteellisena. Tiivistämisprosessissa opiskelija hahmottaa monivaiheiset operaatiot kokonaisuuksina. Reifikaatioprosessissa muotoutuu lopullinen objekti. [13]

Jos käsitteenmuodostusprosessi katkeaa, opiskelija oppii ainoastaan pinnallisella tasolla joitakin symboleita. Hän ei pysty yhdistämään satunnaisesta kohtaa käsitteenmuodostusketjua opiskelemiaan asioita aiemmin oppimiinsa alempien tasojen rakenteisiin, jolloin myös syvällisen ymmärryksen tasolle pääsy estyy. [13] Tämän perusteella voidaan ajatella, että ennen uuden asian oppimista on hyvä varmistaa, että pohjatiedot, jotka mahdollistavat uuden asian oppimisen ovat riittävät.

3.2 Oppimiskäsitykset

Lukion opetussuunnitelma pohjautuu pitkälti konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen. Siinä korostetaan jonkin verran konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen kuuluvaa kollaboratiivista oppimista. [22] Saman oppimiskäsityksen käyttäminen myös yliopiston matematiikan kursseilla on järkevää.

Konstruktivismissa on hyvin paljon erilaisia suuntauksia eikä se ole koottavissa täysin yhtenäiseksi teoriaksi. Se on paradigma, joka käsittelee tiedon olemusta laajasti etenkin yhteiskunta- ja ihmistieteiden osa-alueilla. Konstruktivistinen oppimiskäsitys on yksi kyseisen tietoteoreettisen paradigman ilmenemismuodoista oppimisentutkimuksen ja pedagogiikan alueilla. [44] Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen seuraa opiskelijan aktiivisesta, tavoitteellisesta ja itseohjautuvasta toiminnasta [22]. Opiskelija tulkitsee, analysoi ja arvioi tekemiään havaintoja ja uutta tietoa aikaisempien kokemustensa ja tietojensa pohjalta oppimisprosessin aikana. Tällä tavoin opiskelija pystyy rakentamaan uutta tietoa ja syventämään sitä kautta omaa osaamistaan. [22, 44] Konstruktivismisessa oppimiskäsityksessä aikaisempi tieto on siis kaiken perusta, minkä vuoksi asioiden kertaaminen on tärkeää.

Konstruktivismi jakautuu moniin eri suuntauksiin, joiden välillä merkittävin ero on se, käsitelläänkö oppimista yksilön vai ryhmän tai laajemman yhteisön tasolla [44]. Opetussuunnitelma hyödyntää useita eri suuntauksia. Seuraavaksi käsitellään tarkemmin kognitiivista ja kollaboratiivista konstruktivismia, joista edellä mainittu on esimerkki yksilöllisestä oppimisesta ja jälkimmäisenä mainittu yhteisöllisestä oppimisesta.

Kognitiivinen konstruktivismi pyrkii rakentamaan ja jäsentelemään kokemuksia ja niiden kautta saatuja tietoja uusiksi oppimista edistäviksi kokonaisuuksiksi. Kognitiiviseen konstruktivismiin liittyvät keskeisesti assimilaation, akkommodaation ja skeeman käsitteet. Skeema tarkoittaa tietorakennetta, johon perustuu yksilön havaintojen jäsentely ja tulkitseminen. Skeemat voivat muuttaa muotoaan uusien kokemusten myötä. Ne ovat sisäisiä malleja siitä, mitä eri asiat sisältävät, miten ne toimivat ja miten tapahtumat etenevät. [44] Esimerkiksi opiskelijalla voi olla 'integrointiskeema', jonka mukaisesti opiskelija integroi tietyn lausekkeen ja lisää integroimisvakion. Assimilaatiolla eli sulauttamisella tarkoitetaan mekanismia, jossa uudet kokemukset, havainnot ja tiedot liitetään jo olemassa oleviin skeemoihin. Akkommodaatiolla eli mukauttamisella puolestaan tarkoitetaan sitä mekanismia, jossa yksilö mukauttaa aiempia skeemoja saadakseen uuden havainnon, kokemuksen tai tiedon sopimaan johonkin skeemaan. [44] Esimerkiksi määrätyn integraalin käsittelyn yhteydessä opiskelija voi jakaa 'integrointiskeeman' kahteen osaan: integraalin laskeminen ja määrätyn integraalin laskeminen.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan tietoa ei myöskään koskaan kopioida, vaan sen jäsenteleminen ja merkitysten rakentaminen johtaa ymmärtämiseen. Esimerkiksi fysiikan tai matematiikan käsitteitä voi kyllä opetella ulkoa, mutta jos ei niitä samalla myös ymmärrä, niistä ei ole lainkaan hyötyä. [44]

Kollaboratiivinen oppiminen (engl. collaborative learning) pohjautuu sosiaaliseen konstruktivismiin ja suomennetaan usein myös yhteistoiminnalliseksi tai yhteisölliseksi oppimiseksi. Se tarkoittaa opiskelumuotoa, jossa ryhmän jäsenet saavat yhteisen tehtävän ja tavoitteen. Siinä pyritään vuorovaikutteisesti toisten ihmisten kanssa rakentamaan yhteistä ymmärrystä ja jaettuja merkityksiä. Opiskelijat eivät opi yhteistyötä tehdessään sen takia, että tekevät yhteistyötä, vaan tarkoituksena on, että yhteistyötä tehdessä opiskelijat tekevät jotakin, joka käynnistää oppimismekanismeja. [44]

Kollaboratiivisen oppimisen keskeisenä tavoitteena on kaikille ryhmän jäsenille samankaltaisen kuvan muodostaminen opiskeltavasta asiasta. Kognitiivisen konstruktivismin mukaan yksilöiden mentaalisten rakenteiden ajatellaan aina olevan erilaisia. Yhteistoiminnalla ja keskustelemalla on kuitenkin mahdollista päästä niin samankaltaisiin käsityksiin, että voidaan jo puhua jaetusta tai yhteisestä merkityksestä. Eri henkilöiden välistä yhteisymmärrystä voidaan kutsua intersubjektiivisuudeksi. Kollaboratiivisen oppimisen keskeisiä tekijöitä ovat ryhmätyöskentelyssä saavutettu intersubjektiivisuuden aste ja jaetun tiedon konstruktointi. [44]

Kollaboratiivisella oppimisella on tiettyjä ehtoja, sillä mikä tahansa ryhmätyöskentely ei ole tehokkaampaa kuin yksin työskentely. Ryhmän jäsenten välillä täytyy vallita keskinäinen positiivinen riippuvuus eli ryhmän jäsenten tulee kokea tarvitsevansa toisiaan, jotta työskentely ei muutu kokoelmaksi yksin tehtyjä töitä. Vuorovaikutuksen tukeminen on myös tärkeää. Ryhmän jäsenten tulee auttaa toisiaan; jakaa ja vaihtaa materiaaleja ja informaatiota keskenään sekä antaa toisilleen palautetta ja kommentteja. Jokaisella ryhmän jäsenellä on myös yksilöllinen vastuu riittävän panoksen tuomiseksi ryhmälle, jotta sille asetettu tavoite tulisi saavutettua. Yhteistoiminnallinen oppiminen kehittää sosiaalisia ja ryhmätyötaitoja, jotka riittämättöminä saattaa olla este yhteistoiminnalliseen oppimiseen. Ryhmän jäsenten itsearviointi on myös tärkeää, jotta ryhmä voi kehittää toimintatapojaan ja suhtautua sopivalla kriittisyydellä työskentelyynsä ja saamaansa tehtävään. [44]

Kognitiivinen konstruktivismi tukee siis sitä, että Insinöörimatematiikka 1 -kurssille suunnitellun tukimateriaalipaketin täytyy olla myös itsenäisesti tehtävissä. Kollaboratiivinen konstruktivismi puolestaan tukee tukiharjoitusten järjestämistä ja ryhmätyöskentelyn mahdollistamista tukiharjoituksissa. Tukimateriaaleja käsitellään viikoittain tukiharjoituksissa, joissa työskentely onnistuu niin itsenäisesti kuin ryhmässä. Tukiharjoituksiin osallistuminen ei kuitenkaan ole pakollista, vaan paketin suorittaminen onnistuu myös itsenäisesti verkossa. Tällä tavoin voidaan päästä mahdollisimman hyviin oppimistuloksiin.

3.3 Oppimisstrategiat

Kaikki eivät opi samalla tavalla, vaan jokaisella yksilöllä on oma oppimisstrategiansa eli tapansa suorittaa tietty oppimistehtävä. [44] Oppimisstrategioita voidaan jaotella monilla eri tavoilla. [17] Tässä työssä esitellään yksi jaottelutapa, jossa oppimisstrategiat jaetaan kolmeen suurempaan luokkaan. Yksityiskohtaisempi jaottelutapa ei ole työn kannalta tarpeellinen.

Oppimisstrategiat jaotellaan kertausstrategioihin, muokkausstrategioihin ja organisointistrategioihin. Kertausstrategian avulla opiskelija pitää mielessä tai palauttaa mieleen opittavan asian. Asioiden toistaminen mieleen painamisen tukena on yksi yksinkertaisimmista kertausstrategioista. Esimerkiksi matematiikassa ulkoa muistettavat kaavat tai laskusäännöt voi opetella kertausstrategiaa hyödyntäen. Kertausstrategioihin liittyy asioiden ja käsitteiden jäsentely sekä aktiivinen opittavan asian työstäminen. Kertausstrategioihin liittyy esimerkiksi luentomuistiinpanojen tekeminen. Kertausstrategian kannalta on siis tärkeää oppia ja muistaa aiheeseen liittyviä avainsanoja tai pääkohtia. [8]

Työssä käsiteltävään tukimateriaalipakettiin sisältyy eri aihepiireihin liittyviä tehtäväsarjoja, joiden alussa ovat informaatiolaatikot, joista käy ilmi kunkin tehtäväsarjan tehtävien kannalta oleellisimmat asiat. Tämä helpottaa kertausstrategian käyttöä. Lisäksi opiskelijat voivat halutessaan tehdä informaatiolaatikon asioista omat muistiinpanonsa. Tukiharjoituksissa käydään myös opettajajohtoisesti läpi niissä laskettavien tehtävien kannalta oleellisimpia asioita, jolloin opiskelijoille tarjoutuu mahdollisuus myös kirjoittaa tärkeimmät asiat itselleen muistiin tukiharjoitusten aikana.

Muokkausstrategian avulla opiskelija muokkaa ja ryhmittelee uutta tietoa siten, että saa sen helpommin sidottua jo opittuihin asioihin. Muokkausstrategiaan liittyy esimerkiksi käsitteiden upottaminen tarinoihin ja visualisointi piirroksin, sillä esimerkiksi tällä tavoin voidaan rakentaa yhteyksiä vanhan tiedon ja uuden tiedon välille. [8] Esimerkiksi yksikköympyrä-käsitteen ymmärtäminen on helpompaa, kun siitä piirretään kuva. Kuvassa oleva koordinaatisto, ympyrä ja sen ykkösen mittainen säde auttavat hahmottamaan käsitettä yksikköympyrä. Lisäksi koordinaatisto, ympyrä ja sen säde ovat ainakin osittain opiskelijalle entuudestaan tuttuja.

Muokkausstrategiat muuttavat haastavaakin ajattelua vaativaa tietoa paremmin omaksuttavaan muotoon. Opitun asian omin sanoin selittäminen, toiselle opettaminen tai toisessa ympäristössä soveltaminen ovat esimerkkejä muokkausstrategioista. [8] Tukiharjoituksissa opiskelijoita kannustetaan tekemään tehtäviä yhdessä, jolloin toiselle opettaminen ja asian omin sanoin selittäminen ovat käytettyjä strategioita. Ne edes auttavat asian ymmärtämistä. Lisäksi muokkausstrategioihin kuuluu opiskelijoiden aiheesta muodostamat kysymykset. Kysymysten muodostaminen ja niihin vastausten saaminen edes auttavat oppimista. [8] Kysymykset voi esittää parille tai ryhmälle, jonka kanssa tekee tukiharjoituksia tai sitten ne voi suunnata niiden ohjaajalle tukiharjoitustilaisuudessa.

Organisointistrategiat ryhmittelevät tietoa uudelleen. Ryhmittely voi tapahtua esimerkiksi kunkin tieteenalan luokitteluperusteiden mukaisesti. Tukimateriaaleissa viikoittaiset aiheet ovat yksi luokittelutapa. Viikon aiheen sisältämiä asioita opiskelijat voivat luokitella kukin omalla tavallaan. Organisointistrategioiden avulla opiskelija voi lisätä muistikapasiteettiaan yhdistelemällä ja luokittelemalla opittavia asioita helpommin käsiteltäviksi kokonaisuuksiksi. Käsitekarttojen tekeminen on yksi esimerkki organisointistrategian toiminnasta. [8]

Tukimateriaalien luokittelu viikkokohtaisiin aiheisiin, jotka liittyvät aina samalla viikolla käsiteltäviin Insinöörimatematiikka 1 -kurssin aiheisiin, auttavat aiheiden välisen sidosteisuuden löytämisessä. Opiskelijan on näin helpompi yhdistää uusi Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla tuleva aihe jo olemassa oleviin tietorakenteisiin ja mahdollisesti lukiossa opittuihin asioihin. Insinöörimatematiikka 1 -kurssi ja tukimateriaalit esitellään tarkemmin seuraavassa luvussa.

3.4 Insinöörimatematiikka 1 -kurssin tukimateriaaleissa kerrattavat asiat

Insinöörimatematiikka 1 -kurssi on Tampereen yliopistossa tekniikan kandidaatiksi opiskelevien ensimmäinen matematiikan kurssi yliopistossa. Sen tavoitteina ovat reaalilukujen osajoukkojen tulkitseminen ja kirjoittaminen yhdistettä, leikkausta, erotusta ja komplementtia apuna käyttäen, alkeisfunktioiden ja niistä koostettujen yksinkertaisten kuvaajien hahmotteleminen, derivaattojen laskeminen sekä hyödyntäminen funktion kulun ja ääriarvojen tarkastelussa sekä funktion käyttäytymisen tutkiminen raja-arvoja laskemalla. Lisäksi opiskelijan tulee osata ilmaista kompleksiluvut koordinaatti- ja napakoordinaattimuodossa sekä hyödyntää näitä esityksiä peruslaskutoimituksissa. Myös näiden kahden esitystavan välillä siirtyminen on osattava. Kompleksiluvun juurten laskeminen ja reaalikertoimisten polynomien jako tekijöihin täytyy myös osata. [34]

Kurssin puutteellisilla esitiedoilla aloittavien tukemiseksi kurssille tehtiin syksyksi 2019 tukimateriaalipaketti. Tukimateriaalipaketissa on jokaisella viikolla käsiteltävänä tietty aihe, joka tarvitaan pohjatiedoksi sen viikon Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luennoilla ja laskuharjoituksissa. Tukimateriaalit kertaavat lukion pitkän matematiikan oppimäärään sisältyviä asioita. Tukimateriaalien sisällöissä käytetään hieman myös valtakunnallisten syventävien kurssien tietoja, jotka eivät välttämättä ole entuudestaan tuttuja kaikille opiskelijoille, sillä kurssit eivät ole pakollisia lukiossa. Tämän vuoksi osa asioista saattaa olla täysin uusia joillekin opiskelijoille. Osa opiskelijoista voi myös olla opiskellut lukiossa lyhyttä matematiikkaa, jolloin täysin uusia asioita tulee tukimateriaaleissa hieman enemmän. Tukimateriaaleja voi tehdä itsenäisesti verkossa tai viikoittaisissa tukiharjoituksissa, jolloin apua saa myös tukiharjoitusten ohjaajalta. Tukiharjoituksiin osallistumiseen ja tukimateriaalien tekemiseen tietyllä viikolla kehotetaan etenkin heitä, jotka ovat saaneet yliopinto-opintojen alussa olevassa perustaitotestissä kyseisestä aihealueesta alhaiset pisteet.

Tukimateriaalipaketti on rakennettu Moodle-alustalle. Se koostuu viikoittaisista tehtäväsarjoista, jotka sisältävät automaattitarkastettavia STACK-tehtäviä sekä opetusvideoista ja PDF-tiedostosta. Kunkin tehtäväsarjan alussa on myös informaatiolaatikko, jossa kerrotaan tehtäväsarjan tehtävien ratkaisemisen kannalta oleellisimpia asioita. Tehtäväsarjat on luotu käyttämällä Moodlen ’Tentti’-aktiviteettia. Siihen saa luotua STACK

-tehtäviä, joihin puolestaan saa luotua malliratkaisuja ja ratkaisussa avustavia vihjeitä. 'Tentti'-aktiviteettia käyttämällä tehtäväsarjojen ominaisuuksiksi pystyy määräämään esimerkiksi rajattoman monta ratkaisuyritystä. Lisäksi STACK-tehtävät ovat satunnaistettuja eli tehtäväsarjan voi tehdä uudestaan uusin kysymyksin niin monta kertaa kuin haluaa. Jokaisella viikolla tehtäväsarjojen kysymysten määrä on mitoitettu niin, että se on ratkaistavissa kahden tunnin tukiharjoituksissa. Tukiharjoitusten alussa käydään osa tehtäväsarjan alussa olevan informaatiolaatikon asioista opettajajohtoisesti läpi. Työn Liitteenä A on yhden viikon tehtäväsarja. Myös muiden tehtäväsarjojen rakenne on vastaavanlainen.

Opetusvideoista saa tukea viikoittaisten tehtävien tekemiseen. Tukimateriaaleissa käytetyt videot ovat Opetus.tv-verkkosivulla olevia videoita. Lisäksi ensimmäisen viikon tukiharjoitusten yhteyteen on laitettu PDF-tiedosto, jossa kerrotaan erilaisista todistuksista ja esitellään joitakin niihin liittyviä esimerkkejä. Seuraavana esitellään tarkemmin viikkojen aiheet ja perustellaan sitä, miksi jokin asia on valittu kerrattavaksi tukimateriaaleissa.

Ensimmäisellä viikolla luennoilla käsitellään joukko-oppia, logiikkaa ja todistamista. Tukimateriaaleissa puolestaan käsitellään laskusääntöjä, lukujoukkoja, todistamista sekä joukkojen yhdistettä, leikkausta ja erotusta. Lukion opetussuunnitelman tavoitteissa sanotaan ensimmäisen kurssin 'Luvut ja lukujonot' kohdalla, että jo opetetut lukualueet kerrataan ja opittua täydennetään uusilla lukualueilla. Lisäksi kerrataan peruslaskutoimituksia. [22] Tämän vuoksi ensimmäisen viikon tukimateriaaleissa ovat peruslaskusäännöt ja lukualueet. Lisäksi niissä käsitellään erilaisia joukko-opin merkintöjä, joita ei kuitenkaan lukiossa ole vielä juurikaan käsitelty, joten tukiharjoitusten alussa käydään opettajajohtoisesti läpi muutamat joukko-opin merkinnät, kuten joukkojen yhdiste, leikkaus ja erotus. Niistä koostetaan myös informaatiolaatikko tehtäväsarjan alkuun, jotta materiaalien tekeminen onnistuu myös täysin verkossa. Lisäksi kerrataan logiikan perusmerkinnät opettajajohtoisesti ennen tehtäväsarjan tekemistä, sillä asia käsitellään lukiossa valtakunnallisella syventävällä kurssilla, joka ei ole kaikille pakollinen [22]. Kyseiset asiat laitetaan myös tentin alussa olevaan informaatiolaatikkoon. Ensimmäisen viikon tukimateriaaleihin kuuluu myös PDF-tiedosto, joka kertoo todistamisesta. Siinä käsitellään perustodistukset: suora-, käänteinen ja induktiotodistus sekä vastaesimerkki, sillä lukiossa todistamista käsitellään lähinnä valtakunnallisella syventävällä kurssilla 'Lukuteoria ja todistaminen', joka ei ole kaikille pakollinen. [22] Kaikki yliopistoon tulevat opiskelijat eivät siis välttämättä ole käsitelleet aihetta lainkaan. Ensimmäisen viikon materiaalit sisältävät siis yhden PDF-tiedoston, yhden linkin opetusvideoihin lukujoukoista ja lukujen ominaisuuksista sekä tehtäväsarjan, joka sisältää 18 tehtävää.

Toisella viikolla luentojen aiheena on funktiot ja alkeisfunktiot. Funktioita ja alkeisfunktioita käsitellään lukion toisella matematiikan kurssilla 'Polynomifunktiot ja -yhtälöt' sekä lukion kahdeksannella kurssilla 'Juuri- ja logaritmifunktiot'. Lukion toisella kurssilla tavoitteisiin lukeutuu polynomifunktioiden harjaantunut käsittely, toisen asteen polynomien ratkaiseminen ja ratkaisujen lukumäärän tutkiminen, korkeamman asteen polynomien ratkaiseminen silloin, kun se voidaan tehdä ilman polynomien jakolaskua sekä yksinkertaisten polynomiepäyhtälöiden ratkaiseminen. Lisäksi tavoitteisiin kuuluu teknisten apuvälineiden käyttö edellä mainittujen asioiden ja niistä muodostettujen sovellusongelmien ratkaisemisessa. Lukion kahdeksannen matematiikan kurssin tavoitteina funktioihin ja alkeisfunktioihin liittyen ovat juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksien tunteminen sekä niihin liittyvien yhtälöiden ratkaiseminen teknisiä apuvälineitä sallittaessa käyttäen. [22]

Tukimateriaaleissa kerrataan polynomifunktioita, joiden opiskelusta opiskelijoilla on kohtalaisen pitkä aika yliopistoon tullessa. Lisäksi kerrataan myös juuri-, logaritmi- ja eksponenttifunktioiden ominaisuuksia, jotta pystytään sujuvasti hyödyntämään niitä uuden oppimisessa. Tukimateriaalissa tuodaan esiin myös käsitteet potenssifunktio ja rationaalifunktio. Rationaalifunktio tulee joiltain osin tutuksi lukion 'Derivaatta' -kurssilla, mutta koska se on siellä vain pieni osa koko kurssia, niin on käsite hyvä kerrata tukimateriaaleissa [22]. Tämän viikon tukimateriaaleihin sisältyvä tehtäväsarja koostuu 13 tehtävästä. Lisäksi tukimateriaaleissa on kaksi linkkiä, joista voi katsoa aiheeseen liittyviä Opetus.tv:n videoita.

Kolmannella viikolla luentojen aiheena on kompleksiluvut. Kompleksiluvut eivät kuitenkaan kuuluu lukion opetussuunnitelmaan, joten ne eivät suoraan ole tukimateriaalien aiheena. [22] Trigonometristen funktioiden osaamisesta on hyötyä kompleksilukujen ymmärtämiseen, joten tämän viikon tukimateriaaleissa kerrataan niitä. Lukion seitsemännen kurssin 'Trigonometriset funktiot' tavoitteisiin lukeutuu trigonometristen funktioiden tutkiminen yksikköympyrän symmetrioiden avulla, muotoa $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$ olevien trigonometristen yhtälöiden ratkaisemisen osaaminen ja trigonometristen funktioiden yhteyksien $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ osaaminen. Myös trigonometristen funktioiden yhteydessä tavoitteissa korostuu teknisten apuvälineiden hyödyntäminen sallittaessa. [22]

Tukimateriaaleissa kerrataan yksikköympyrän käyttö, trigonometristen funktioiden yhteydet ja trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot sekä esitellään muistikolmiot, joiden käyttö ei ole entuudestaan kaikille tuttu. Muistikolmiot ja yksikköympyrä käydään tukiharjoitusten alussa opettajajohtoisesti läpi. Ne on käsitelty myös kyseisen viikon tehtäväsarjan alussa olevassa informaatiolaatikossa. Tällä viikolla tehtäväsarja koostuu 10 tehtävästä. Niiden lisäksi tukimateriaaleissa on linkki yksikköympyrään liittyviin opetusvideoihin.

Neljännellä viikolla luentojen ja tukimateriaalien aiheena on raja-arvo ja jatkuvuus. Lukion kuudennella kurssilla 'Derivaatta' käsitellään raja-arvoa ja jatkuvuutta. Tavoitteena on omaksua havainnollinen käsitys funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta sekä osata käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon ja jatkuvuuden tutkimisessa. Lisäksi raja-arvoa käsitellään 13. kurssilla 'Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi'. Siellä käsittely painottuu funktioiden ja lukujonojen raja-arvojen laskemiseen äärettömyydessä. Kurssin tavoitteisiin kuuluu lukujonon raja-arvon tutkimisen hallitseminen ja teknisten apuvälineiden käyttö ratkaisun apuvälineenä sallittaessa. [22]

Tukimateriaaleissa kerrataan polynomi- ja rationaalifunktion raja-arvon laskeminen ja se, milloin rationaalifunktion raja-arvon lauseketta voidaan sieventää. Myös toispuoleiset raja-arvot ja jatkuvuus kerrataan. Opettajajohtoisesti käydään läpi kaikki edellä mainitut kerrattavat asiat lyhyesti. Kaikista kerrattavista asioista on myös lyhyet kuvaukset tehtäväsarjan alussa olevassa informaatiolaatikossa. Lisäksi tukimateriaaleihin kuuluu kaksi linkkiä, joista pääsee katsomaan raja-arvoon ja funktion jatkuvuuteen liittyviä opetusvideoita. Tämän viikon tukimateriaalien tehtäväsarja koostuu yhdeksästä tehtävästä.

Viidennellä viikolla luentojen aiheena on derivaatta ja ääriarvot. Tukimateriaaleissa kerrataan derivointi, funktion kulku ja ääriarvot. Lukion kuudennen kurssin, 'Derivaatta', tavoitteisiin lukeutuu yksinkertaisten funktioiden derivaatan määrittämisen osaaminen, polynomifunktion kulun tutkimisen ja ääriarvojen määrittämisen osaaminen, rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon määritysprosessin tunteminen ja teknisten apuvälineiden hyödyntämisen osaaminen edellä mainittujen asioiden yhteydessä. [22]

Tukimateriaaleissa on syytä kerrata derivaatan määritelmä, alkeisfunktioiden derivoimissäännöt, derivoimissäännöt tulolle, osamäärälle, vakiokertoimiselle funktiolle ja yhteenlaskulle sekä ääriarvojen ratkaisumekanismi polynomi- ja rationaalifunktioille. Tehtäväsarjan informaatiolaatikko sisältää derivaatan määritelmän ja esimerkin sen käytöstä laskutehtävissä sekä funktion kulun ja ääriarvojen tarkastelun. Vastaavat asiat käydään tukiharjoituksissa läpi opettajajohtoisesti. Tehtäväsarja koostuu yhdeksästä tehtävästä ja sen lisäksi tukimateriaaleissa on kolme aiheeseen liittyvää linkkiä opetusvideoihin.

Kuudennen viikon luentojen aiheena on funktion kulku ja integrointi. Tukimateriaaleissa käsitellään tällä viikolla integrointia. Lukion yhdeksännen kurssin 'Integraalilaskenta' tavoitteina ovat integraalifunktion käsitteen ymmärtäminen ja alkeisfunktioiden integraalifunktioiden määrittämisen oppiminen, määrätyn integraalin käsitteen ja pinta-alayhteyden ymmärtäminen, pinta-alojen ja tilavuuksien määrittäminen määrätyn integraalin avulla, integraalilaskennan sovelluksiin perehtyminen ja teknisten apuvälineiden käyttö edellä mainittujen asioiden määrittämisessä. [22]

Integraaleihin liittyviä asioita käsitellään myös matematiikan 13. kurssilla 'Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi'. Siellä tavoitteena on syventää integraalilaskennantaitoja ja teknisten apuvälineiden käyttötaitoja epäoleellisiin integraaleihin liittyvissä soveltavissa tehtävissä. Kurssi kuuluu valtakunnallisiin syventäviin kursseihin, joten se ei ole kaikille pakollinen. [22]

Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla integraalia käsitellään lyhyesti ja tarkemmin vasta Insinöörimatematiikka 3 -kurssilla. Tarpeen on kuitenkin kerrata perusintegroimissääntöjä, alkeisfunktioiden integrointia, määrättyjä integraaleja ja epäoleellisia integraaleja. Tehtäväsarjan informaatiolaatikko sisältää integraalin ja määrätyn integraalin määritelmät sekä niihin liittyvät esimerkit. Vastaavat esimerkit käydään opettajajohtoisesti läpi myös tukiharjoituksissa. Viikon tehtäväsarja koostuu kahdeksasta tehtävästä, joiden lisäksi viikon tukimateriaaleihin sisältyy yksi linkki integrointia käsitteleviin opetusvideoihin.

Seitsemännellä eli viimeisellä viikolla opiskelijoilla on Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luennot ohi ja tukimateriaaleissa kerrataan kurssin tärkeimpiä asioita. Tällä viikolla tehtäväsarjan alussa ei ole informaatiolaatikkoa, vaan opiskelija voi kerrata tehtävissään tarvitsemia asioita luennolla käytetyistä oppimateriaaleista. Tehtäväsarja koostuu viidestä tehtävästä. Ne käsittelevät raja-arvoa, totuustaulukoita, joukko-oppia, kompleksilukujen juuria ja funktion kriittisiä pisteitä. Tällä viikolla yksittäiset tehtävät ovat huomattavasti muiden viikkojen tehtäviä työläämpiä, joten niitä on jonkin verran vähemmän kuin muilla viikoilla.

4 ESIMERKKINÄ PROPOSITIOLOGIIKAN KEHITYSKAARI

Yksi Insinöörimatematiikka 1 -kurssin aiheista on propositiologiikka. Propositiologiikassa eli lauselogiikassa on tutkimuskohteena propositio eli suljettu lause. Usein sitä kutsutaan pelkäksi 'lauseeksi'. Se tarkoittaa logiikassa ilmaisua, joka sisältää väitteen, joka on joko tosi tai epätosi. 'Lause' -sanalla on siis logiikassa eri merkitys kuin kieliopissa tai matematiikassa. [19]

Propositiologiikkaa opetetaan hieman jo lukiossa, mutta enemmän vasta yliopistossa. Propositiologiikka on melko laaja matematiikan osa-alue, joten työssä tarkastellaan yhtä mahdollista propositiologiikan kehityskaarta. Kehitys alkaa lukion propositiologiikasta ja päättyy propositiologiikan SAT-ongelmaan. Kyseistä kaarta tarkastellaan sen takia, että SAT-ongelma on nykypäivänä kiinnostava tutkimuskohde. [18] Lisäksi SAT-ongelma liittyy vahvasti tietotekniikkaan, jonka opiskelijat ovat yksi Luvussa 3 esiteltyjen tukimateriaalien ja -harjoitusten kohderyhmistä. Heidän osaamisensa yliopistomatematiikan opintojen aikana tulisi siis johtaa tämän tyyppisten ongelmien ymmärtämiseen. Tietotekniikan opiskelijat suorittavat Tampereen yliopistossa useimmiten Insinöörimatematiikka 1 -kurssin lisäksi myös muita propositiologiikkaa sisältäviä kursseja, sillä propositiologiikan ymmärtäminen on edellytys SAT-ongelman ja sen sovellusten ymmärtämiselle. [18, 37] SAT-ongelma sovelluksia ovat muun muassa tekoälyn suunnittelu, ohjelmistojen testaus sekä suunnitteluvirheiden korjaus ja diagnosointi. [18]

4.1 Propositiologiikka lukiossa

Lukiossa propositiologiikkaa käsitellään kurssilla 11, Lukuteoria ja todistaminen. Kurssi kuuluu valtakunnallisiin syventäviin kursseihin, joten se ei ole kaikille pakollinen. Kurssi käsittelee propositiologiikkaa lähinnä konnektiivien ja totuusarvojen näkökulmasta. [22] Pääpainona on siis sellaisten lauseiden tutkiminen, joiden totuusarvo on yksikäsitteisesti joko tosi tai epätosi [9]. Lukion opetussuunnitelman tavoitteena logiikan osalta on logiikan alkeisiin perehtyminen [22].

4.1.1 Konnektiivit ja lauselogiikan lauseiden totuustaulut

Logiikassa luonnollisella kielellä kirjoitetut väitelauseet käännetään formaalille kielelle, jolloin lauseita merkitään kirjaimilla ja lauseiden välisiä suhteita ilmaisevia sanoja eli konnektiiveja symboleilla. [7] Seraavassa taulukossa esitellään lukiossa opetettavat konnektiivit.

Taulukko 4.1. *Lukiossa opetettavat konnektiivit [7, 9]*

Merkintä	Nimitys (lukuohje)
$\neg A$	negaatio (ei A)
$A \wedge B$	konjunktio (A ja B)
$A \vee B$	disjunktio (A tai B)
$A \rightarrow B$	implikaatio (jos A, niin B)
$A \leftrightarrow B$	ekvivalenssi (A, jos ja vain jos B)

Taulukossa 4.1 oleva kahden lauseen disjunktio tarkoittaa inkulsiivista disjunktiota, jonka mukaan joko toinen tai molemmat lauseet toteutuvat. Eksklusiivinen disjunktio puolestaan tarkoittaa sitä, että lauseista täsmälleen yksi toteutuu. [7]

Esimerkki 4.1. Olkoon A : 'Ulkona sataa.' ja B :'Ulkona ukkostaa.' Tällöin inkulsiivinen disjunktion mukaan ulkona joko sataa, ukkostaa tai sataa sekä ukkostaa samanaikaisesti. Eksklusiivinen disjunktion mukaan ulkona joko sataa tai ukkostaa, mutta ei sekä sada että ukkosta samanaikaisesti.

Seuraavia määritelmiä tarvitaan, jotta voidaan täsmentää taulukossa 4.1 esiintyviä merkintätapoja implikaatiolle ja ekvivalenssille.

Määritelmä 4.1. *Atomilause* tarkoittaa yksinkertaista lausetta, joka ei sisällä konnektiiveja. [5] Atomilauseiden joukkoa merkitään $\{r_0, r_1, r_2, ...\}$. *Yhdistetty lause* on atomilauseista konnektiivien avulla muodostettu lause. [7]

Määritelmä 4.2. Lause on *tautologia*, jos ja vain jos se on tosi kaikilla siinä esiintyvien atomilauseiden totuusarvoilla. [15]

Nyt voidaan täsmentää taulukossa 4.1 esiintyviä merkintätapoja implikaatiolle ja ekvivalenssille. Nämä määritelmät eivät esiinny lukiossa, mutta ovat välttämättömiä täsmentää tässä kohtaa työtä, sillä niitä tarvitsee tarkastellessa propositiologiikan kehityskaarta pidemmälle. [7, 9] Logiikassa on erotettava toisistaan kieli, jota tutkitaan eli objektikieli ja kieli, jolla tutkitaan eli metakieli. Objektikielen implikaatiolle ja ekvivalenssille käytetään merkintöjä $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$. Merkinnät $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ ovat puolestaan metakielen käytössä ja ne voidaan määritellä seuraavasti. [19]

Määritelmä 4.3. $A \Leftrightarrow B$, jos ja vain jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Tällöin sanotaan, että A ja B ovat *loogisesti ekvivalentteja*. [19]

Jos yhdistetyillä lauseilla A ja B on molemmilla sama totuusarvot kaikista atomilauseiden totuusarvoista riippumatta, niin lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja. [7]

Määritelmä 4.4. $A \Rightarrow B$, jos ja vain jos $A \rightarrow B$ on tautologia. Tällöin sanotaan, että B on lauseen A *looginen seuraus*. [19]

Totuustaulussa käydään systemaattisesti läpi annettujen väitelauseiden totuusarvojen kaikki yhdistelmät. Totuustaulussa totuusarvo 1 tarkoittaa, että väite on tosi ja 0, että väite on epätosi. [9] Totuusarvoista voidaan käyttää myös merkintöjä T, jos väite on tosi ja E tai F, jos väite on epätosi. Merkintä T tulee suomen kielen sanasta tosi ja englanninkielen sanasta true. Merkintä E puolestaan tulee sanasta epätosi ja F englannin kielen vastaavasta sanasta false. [7]

Totuustaulun avulla voidaan määritellä negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi.

Taulukko 4.2. *Negaation, konjunktion, disjunktion, implikaation ja ekvivalenssin määritelmät*

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Seuraavissa lauseissa esitellään lukiossa käsiteltävät tautologiat ja todistetaan yksi niistä totuustaulun avulla. Loogisille konnektiiveille on sovittu tietty suoritusjärjestys, jotta sulkuja on vähemmän ja pidemmät yhdistetyt lauseet näyttävät selkeämmiltä. Ensin suoritetaan negaatiot, seuraavaksi konjunktiot ja disjunktiot sekä viimeiseksi implikaatiot ja ekvivalenssit. [19]

Lause 4.1. *Kaksoiskiellon laki [9]*

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

Todistus.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
1	0	1	1
0	1	0	1

Kaksoiskiellon laki on siis tosi, koska se saa kaikissa tapauksissa totuusarvon 1. □

Lause 4.2. *De Morganin lait [9]*

$$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$$
$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$$

Lause 4.3. *Kontraposition laki [9]*

$$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

Lauseet 4.2 ja 4.3 todistetaan vastaavasti kuin Lause 4.1.

Uuden opetussuunnitelman mukaisia kirjasarjoja on lukion pitkään matematiikkaan kaksi: Sanomapron julkaisema Tekijä-kirjasarja ja Otavan julkaisema Juuri-kirjasarja. Tekijä-sarjan propositiologiikan tehtävistä suurin osa käsittelee väitelauseita, jotka eivät sisällä itsessään matematiikkaa. Esimerkiksi 'voit ajaa pyörällä' tai 'rannalla tuulee'. Juuri-sarja puolestaan painottaa hieman enemmän väitelauseita, jotka sisältävät lukuja ja matematiikassa usein käytettyjä operaatioita tai symboleita, kuten 'a on parillinen' ja '$a > 5$ tai $b > 15$'. [7, 9]

4.2 Propositiologiikka Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla

Insinöörimatematiikka 1 -kurssin esitietovaatimuksiin ei lukeudu propositiologiikan alkeiden osaamista, koska ne ei sisälly pakollisena lukion matematiikkaan. [22] Propositiologiikan esitietovaatimuksiin lukeutuvat matemaattisen kielen käytön osaaminen, matemaattisen tiedon näkeminen loogisena rakenteena sekä tiedon käsittely matematiikalle tyypillisellä tavalla. Matemaattisen kielenkäytön osaamiseen kuuluvat muun muassa matemaattisen tiedon esittämisen seuraaminen, matemaattisen tekstin lukeminen, matemaattinen keskusteluun pystyminen sekä esityksen täsmällisyyden ja perustelujen selkeyden arvostaminen. Tiedon käsittelyyn matematiikalle tyypillisellä tavalla sisältyy muun muassa oletusten tekeminen, niiden oikeellisuuden tutkiminen, perustelujen laatiminen ja niiden pätevyyden arvioiminen sekä tulosten yleistettävyyden arvioiminen. [22]

Tämän alaluvun lähteenä on Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luentomoniste [14] aina, jos ei toisin mainita. Insinöörimatematiikka 1 -kurssin tavoitteissa ei suoraan mainita logiikkaa. Tavoitteet on esitetty työn Luvussa 3. Logiikan osalta tavoitteeksi voidaan kuitenkin mainita Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luentomonisteen perusteella matemaattisen päättelyn formalisointi käyttäen propositiologiikan keinoja ja merkintöjä sekä implikaation ja ekvivalenssin eroon ymmärtäminen. Propositiologiikasta on myös hyötyä monilla insinöörialoilla etenkin tietojenkäsittelytieteissä, jossa propositiologiikka on olennainen osa opintoihin kuuluvia loogisia perusteita. [11] Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla propositiologiikassa käydään pitkälti samoja asioita kuin lukiossakin. Joitakin päättelysääntöjä, jotka tulevat Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla, ei välttämättä lukiossa ole mainittu nimeltä, vaikka muuten niitä onkin saattanut tehtävissä esiintyä. Seuraavaksi esitellään Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla käsiteltävät päättelysäännöt.

Lause 4.4. *Vaihdantalait*

$$A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$$
$$A \land B \Leftrightarrow B \land A$$

Lause 4.5. *Liitäntälait*

$$A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$$
$$A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$$

Lause 4.6. *Osittelulait*

$$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Lause 4.7. *Ekvivalenssilaki*

$$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

Lause 4.8. *Suora todistus*

$$A \land (A \rightarrow B) \Leftrightarrow B$$

Lause 4.9. *Epäsuora todistus*

$$(A \rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$
$$[A \land ((A \land \neg B) \rightarrow (C \land \neg C))] \Rightarrow B$$

Insinöörimatematiikka 1 -kurssillakaan Lauseiden 4.1–4.9 ulkoa opetteluun ei kannusteta, koska ne ovat pääteltävissä normaalin arkiajattelun keinoin. Tämän takia lukiolaiset ovat voineet käyttää kyseisiä päättelysääntöjä, vaikkei niitä olisikaan nimeltä mainittu. Kaikkien päättelysääntöjen todistaminen onnistuu totuustaulun avulla.

Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla väitelauseet sisältävät usein enemmän matemaattisia merkintöjä kuin lukion oppikirjojen tehtävien väitelauseet.

Esimerkki 4.2. Jos a ja b ovat luonnollisia lukuja eli $a \in \mathbb{N}$ ja $b \in \mathbb{N}$, niin seuraavat ovat väitelauseita:

$$p: \qquad a \geq b$$
$$q: \qquad a = 8$$

Muodostetaan väitelauseista kolme esimerkkilausetta.

$$
\begin{aligned}
p \wedge q: &\quad \text{a suurempi tai yhtä suuri kuin b ja a on 8.}\\
q \rightarrow p: &\quad \text{jos a on 8, niin a on suurempi tai yhtä suuri kuin b.}\\
\neg q \leftrightarrow p: &\quad \text{a ei ole 8, jos ja vain jos a on suurempi tai yhtä suuri kuin b.}
\end{aligned}
$$

Esimerkin 4.2 kaltaisten tehtävien avulla opiskelijat oppivat lukemaan ja kielentämään matematiikkaa. Samalla he voivat myös ymmärtää paremmin eri loogisten konnektiivien merkitykset ja eroavaisuudet.

4.3 Propositiologiikka Insinöörimatematiikka 1 -kurssin jälkeen yliopistossa

Insinöörimatematiikka 1 -kurssin propositiologiikka kertaa pitkälti lukion lauselogiikkaa ja siinä tulee vain vähän uutta asiaa. Sen jälkeen Tampereen yliopistossa on tarjolla kandidaatti- ja diplomivaiheessa viisi valinnaisiin kursseihin sisältyvää logiikan kurssia: Johdatus logiikkaan 1, Johdatus logiikkaan 2, Algoritmimatematiikka, Mathematical Logic ja Matemaattinen logiikka. [33, 39] Kursseja ei tarvitse suorittaa edellä mainitussa järjestyksessä, mutta osalle kursseista on tietyt esitietovaatimukset. Johdatus logiikkaan 2 -kurssi on jatkokurssi Johdatus logiikkaan 1 -kurssille ja esitietovaatimus Matemaattinen logiikka -kurssille. [38, 40, 41] Nämä kolme kurssia järjestetään Tampereen yliopiston keskustan kampuksella, joten niitä ei ole sidottu Hervannan kampuksella järjestettäviin Algoritmimatematiikan ja Mathematical Logic -kursseihin mitenkään. Mathematical Logic ja Matemaattinen logiikka ovat myös sisällöiltään hyvin erilaisia, vaikka molempien nimet ovatkin suomeksi 'Matemaattinen logiikka'. [38, 40, 41]

Ennen algoritmimatematiikan kurssille osallistumista on suositeltavaa käydä joko Insinöörimatematiikka 1 tai Matematiikka 1 -kurssi [35]. Matematiikka 1 -kurssi on erityisesti matematiikan pääaineopiskelijoille suunnattu kurssi, jolla opiskellaan pitkälti samoja asioita kuin Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla, mutta hieman syvällisemmin. [33] Algoritmimatematiikka -kurssi toimii Mathematical Logic -kurssin esitietovaatimuksena [36]. Mathematical Logic ja Matemaattinen logiikka -kurssit vastaavat joiltain osin toisiaan, mutta niiden kurssimateriaalit pohjautuvat eri kirjoihin ja kurssit ovat eri laajuisia. Toinen kursseista järjestetään Hervannan kampuksella ja toinen keskustan kampuksella [36, 38].

Johdatus logiikkaan 1 -kurssin tavoitteena on hallita erilaisia menetelmiä, joilla voi tutkia, päteekö looginen seuraus annetun lausejoukon ja lauseen välillä, tai onko annettu propositiolause tautologia. Lisäksi opiskelijan tulee ymmärtää luonnollisen päättelyn periaatteet ja semanttisten puiden menetelmä sekä osata todistaa keskeiset aputulokset, jotka liittyvät eheys- ja täydellisyyslauseen todistuksiin. [40]

Johdatus logiikkaan 2 -kurssin tavoitteet liittyvät enemmän predikaattilogiikkaan. Kurssilla käsitellään vastaavia aiheita kuin Johdatus logiikkaan 1 -kurssilla, mutta näkökulmana on propositiologiikan sijaan predikaattilogiikka. [41]

Algoritmimatematiikan propositiologiikkaan liittyviä tavoitteet ovat loogisten konnektiivien merkityksen tunteminen, loogisten lauseiden ekvivalenteiksi osoittaminen, loogisten lausekkeiden sieventäminen ja muokkaaminen sekä helpohkojen loogisten päättelyjen suorittaminen tunnettuja aksioomia ja päättelysääntöjä hyödyntäen. [35] Mathematical Logic -kurssin tavoitteet eivät juurikaan liity propositiologiikkaan, vaikka aiemmat propositiologiikkaa käsittelevät kurssit ovatkin hyvä pohjatieto kyseiselle kurssille. Myös Matemaattinen logiikka -kurssi liittyy enemmän muihin logiikan osa-alueisiin, kuten predikaattilogiikkaan. [36, 38]

4.3.1 Aksiomasoinnin ja luonnollisen päättelyn perusteet

Aksiomasoinnin ja luonnollisen päättelyn perusteet kuuluvat Algoritmimatematiikka ja Johdatus logiikkaan 1 -kurssien sisältöihin, joten tässä luvussa esitellään niihin liittyviä asioita. Tässä työssä ei kuitenkaan ole tarkoituksen mukaista esitellä jokaista kyseisten kurssien luentomonisteesta löytyvää asiaa vaan poimia joitakin keskeisimpiä asioita, joita propositiologiikan ymmärryksen kasvaminen vaatii.

Propositiologiikassa voidaan käyttää joitakin tautologioita eli aksioomia, esimerkiksi apuna todistusten tekemisessä. Aksioomat voidaan valita monella eri tavalla. Usein pyritään siihen, että valitut aksioomat eivät ole johdettavissa toisistaan, ja että niitä on riittävästi kaikkien pätevien päättelyiden johtamiseen. [28] Seuraavana on esitetty yksi esimerkkilistaus aksioomista. Listauksessa osa aksioomista on kuitenkin johdettavissa toisistaan.

Aksioomat: [21]

$$A \to (B \to A) \tag{4.1}$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{4.2}$$

$$(A \land B) \to A \tag{4.3}$$

$$(A \land B) \to B \tag{4.4}$$

$$B \to (A \to (A \land B)) \tag{4.5}$$

$$A \to (A \lor B) \tag{4.6}$$

$$A \to (B \lor A) \tag{4.7}$$

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)) \tag{4.8}$$

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \tag{4.9}$$

$$\neg A \to (A \to B) \tag{4.10}$$

$$A \lor \neg A \tag{4.11}$$

$$(A \leftrightarrow B) \to (A \to B) \tag{4.12}$$

$$(A \leftrightarrow B) \to (B \to A) \tag{4.13}$$

$$(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B)) \tag{4.14}$$

Aksioomien lisäksi todistuksen apuna voidaan käyttää päättelysääntöjä. Päättelysäännöt liittyvät luonnolliseen päättelyyn, joka perustuu premisseihin eli oletuksiin sekä niistä tehtäviin johtopäätöksiin. Propositiologiikassa voidaan tehdä premisseistä $A_1, A_2, \ldots, A_n$ johtopäätös B, jos premissien ollessa tosia lause B ei voi olla epätosi. Konjunktion ja implikaation määritelmien perusteella tämä on sama asia kuin, että $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ on aina tosi. Premisseistä $A_1, A_2, \ldots, A_n$ voidaan siis tehdä johtopäätös B, jos ja vain jos $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$. Esimerkiksi tautologiaa

$$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$$

vastaa päättelysääntö modus ponens (**MP**) [4]

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Premissit voivat olla kirjoitettuna päättelysääntöön allekkain tai pilkulla erotettuina. [19] Esitellään muutamia muita päättelysääntöjä:

Adjunktio [4]

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$

Modus Tollens (**MT**) [5]

$$\frac{A \to B, \neg B}{\neg A}$$

Disjunktiivinen syllogismi (**DS**) [5]

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A} \text{ tai } \frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

Seuraavaa määritelmää tarvitaan sen alla olevissa esimerkeissä, jotka hyödyntävät joitakin yllä esitetyistä aksioomista ja päättelysäännöistä.

Määritelmä 4.5. Mikäli lause B voidaan johtaa oletuksista $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksioomia ja päättelysääntöjä käyttäen, niin merkitään

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B.$$

Tällöin sanotaan, että on olemassa lauseen B *deduktio* oletuksista $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jos oletuksia ei ole, kirjoitetaan $\vdash B$. [3]

Seuraavien esimerkkien todistuksissa jokaisella vaakarivillä on lause ja sen perässä selitys, miten kyseinen lause on saatu. Lauseen johtamiseksi on voitu esimerkiksi käyttää jotain päättelysääntöä. Kyseisenlaiset todistukset lähtevät liikkeelle premisseistä tai tunnetuista tautologioista eli aksioomista, ja päättyvät, kun saavutetaan haluttu johtopäätös.

Esimerkki 4.3.

$$\vdash A \to A$$

Todistus.

1.	$A \to (B \to A)$	Aksiooma 4.1
2.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Aksiooma 4.2
3.	$A \to (B \vee A)$	Aksiooma 4.7
4.	$A \to ((B \vee A) \to A)$	sijoitetaan $B = B \vee A$ kohtaan 1
5.	$(A \to ((B \vee A) \to A)) \to ((A \to (B \vee A))$	sijoitetaan $B = B \vee A$
	$\to (A \to A))$	ja $C = A$ kohtaan 2
6.	$(A \to (B \vee A)) \to (A \to A)$	MP kohtiin 4 ja 5
7.	$A \to A$	MP kohtiin 3 ja 6

□

Seuraava esimerkki hyödyntää Määritelmän 4.5 lisäksi myös kahta päättelysääntöä, jotka vastaavat Lauseessa 4.1 esitettyä kaksoiskiellon lakia ja Lauseessa 4.2 esitettyä De Morganin lakia. Kyseiset päättelysäännöt voidaan esittää seuraavasti:

Negaation tuonti

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

De Morgan **(DM)**

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B} \text{ tai } \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

Esimerkki 4.4.

$$(A \wedge B) \to \neg C, C \vdash \neg A \vee \neg B$$

Todistus.

1.	$A \wedge B \to \neg C$	premissi
2.	C	premissi
3.	$\neg\neg C$	Negaation tuonti kohtaan 2
4.	$\neg(A \wedge B)$	MT kohtiin 1 ja 3
5.	$\neg A \vee \neg B$	DM kohtaan 4

□

Seuraavaa esimerkkiä varten on tarpeen esitellä vielä kaksi päättelysääntöä: konjunktion eliminointi ja disjunktion tuonti, sillä niitä tarvitaan esimerkin todistuksessa. Edellä mainittu päättelysääntö voidaan johtaa Aksioomista 4.3 ja 4.4 käyttämällä päättelysääntöä modus ponens. Jälkimmäinen päättelysääntö voidaan puolestaan johtaa Aksioomista 4.6 ja 4.7 käyttäen niin ikään päättelysääntöä modus ponens.

Konjunktion eliminointi [5]

$$\frac{A \wedge B}{A} \text{ tai } \frac{A \wedge B}{B}$$

Disjunktion tuonti [5]

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ tai } \frac{A}{B \vee A}$$

Alla olevassa esimerkissä näytetään, että ristiriitaisesta lauseesta $A \wedge \neg A$ seuraa aina mikä tahansa lause B.

Esimerkki 4.5.

$$(A \wedge \neg A) \vdash B$$

Todistus.

1.	$A \wedge \neg A$	premissi
2.	A	Konjunktion eliminointi kohdasta 1
3.	$A \vee B$	Disjunktion tuonti kohtaan 2
4.	$\neg A$	Konjunktion eliminointi kohdasta 1
5.	B	DS kohtiin 3 ja 4

□

4.3.2 Normaalimuodot

Normaalimuodot ovat propositiologiikan keskeisiä asioita ja niitä käsitellään etenkin Algoritmimatematiikka -kurssilla. Niiden ymmärtäminen on keskeistä myös seuraavassa luvussa esiteltävän SAT-ongelman ymmärtämisessä. Määritellään ensin literaali, sillä sitä tarvitaan normaalimuotoja määriteltäessä.

Määritelmä 4.6. Atomilauseet ja niiden negaatiot ovat *literaaleja*. [12]

Määritelmä 4.7. *Disjunktiivinen normaalimuoto* (DNF-muoto) lausekkeelle A on mikä tahansa lauseke B, joka

1. on loogisesti ekvivalentti lausekkeen A kanssa,
2. käyttää täsmälleen samoja atomilauseita kuin A,
3. on muotoa $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$, missä jokainen B_i on muotoa $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ jollekin m, missä jokainen C_j on literaali. [4]

Määritelmä 4.8. *Konjunktiivinen normaalimuoto* (CNF-muoto) lausekkeelle A on mikä tahansa lauseke B, joka

1. on loogisesti ekvivalentti lausekkeen A kanssa,

2. käyttää täsmälleen samoja atomilauseita kuin A,
3. on muotoa $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$, missä jokainen B_i on muotoa $C_1 \vee \cdots \vee C_m$ jollekin m, missä jokainen C_j on literaali. [4]

Esimerkki 4.6. Tarkastellaan disjunktiivista normaalimuotoa

$$(r_0 \wedge \neg r_1) \vee (\neg r_0 \wedge \neg r_1)$$

Muokataan lause konjunktiiviseen normaalimuotoon totuustaulun avulla.

Muodostetaan aluksi disjunktiivisen normaalimuodon totuustaulu

r_0	r_1	$\neg r_0$	$\neg r_1$	$r_0 \wedge \neg r_1$	$\neg r_0 \wedge \neg r_1$	$(r_0 \wedge \neg r_1) \vee (\neg r_0 \wedge \neg r_1)$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Konjunktiivinen normaalimuoto saadaan totuustaulusta niiltä riveiltä, joilla disjunktiivisessa normaalimuodossa olevan lauseen totuusarvo on nolla. Tässä tapauksessa siis riveiltä yksi ja kolme. Riviltä yksi luetaan literaalit, jotka saavat arvon nolla ja muodostetaan niiden disjunktio. Samoin toimitaan myös rivin kolme kanssa. Lopuksi saadut disjunktiot yhdistetään konjunktiolla, jolloin konjunktiiviseksi normaalimuodoksi saadaan

$$(\neg r_0 \vee \neg r_1) \wedge (r_0 \vee \neg r_1).$$

Todistetaan vielä, että

$$(r_0 \wedge \neg r_1) \vee (\neg r_0 \wedge \neg r_1) \Leftrightarrow (\neg r_0 \vee \neg r_1) \wedge (r_0 \vee \neg r_1).$$

Todistus. Merkitään seuraavassa totuustaulussa disjunktiivista normaalimuotoa $(r_0 \wedge \neg r_1) \vee (\neg r_0 \wedge \neg r_1)$ ja konjunktiivista normaalimuotoa $(\neg r_0 \vee \neg r_1) \wedge (r_0 \vee \neg r_1)$ merkinnöillä DNF ja CNF.

r_0	r_1	$\neg r_0$	$\neg r_1$	DNF	$\neg r_0 \vee \neg r_1$	$r_0 \vee \neg r_1$	CNF	$DNF \leftrightarrow CNF$
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1

Totuustaulun perusteella CNF-muoto on loogisesti ekvivalentti DNF-muodon kanssa. □

4.3.3 Semanttisten puiden menetelmä

Semanttisten puiden menetelmä kuuluu Johdatus logiikkaan 1 -kurssilla käsiteltäviin asioihin. Menetelmän avulla pystytään tutkimaan, milloin väitelause on tosi. Propositiologiikan ymmärtämiseksi on hyvä ymmärtää erilaisia väitelauseiden totuusarvojen tutkimistapoja. Määritellään aluksi totuusjakauma, sillä sitä tarvitaan semanttisten puiden menetelmästä puhuttaessa.

Määritelmä 4.9. *Totuusjakauma* eli valuaatio on kuvaus

$$v : \{r_0, r_1, r_2 \dots\} \to \{0, 1\},$$

missä 0 ja 1 vastaavat totuusarvoja epätosi ja tosi. [19]

Havainnollistetaan Määritelmää 4.9 yhdellä esimerkillä.

Esimerkki 4.7. Olkoot $v(r_0) = v(r_1) = 0$ ja $v(r_2) = v(r_3) = \cdots = 1$. Määritetään totuusarvo $v(A)$, kun A on $(r_0 \lor r_2) \to (r_1 \land r_2)$.

Olkoon B lause $(r_0 \lor r_2)$ ja C lause $(r_1 \land r_2)$, jolloin A on $B \to C$. Koska totuusarvo $v(r_2) = 1$, niin totuusarvo $v(B) = 1$, ja koska totuusarvo $v(r_1) = 0$, niin totuusarvo $v(C) = 0$. Tällöin myös totuusarvo $v(A) = 0$.

Semanttisten puiden menetelmä on täysin mekaaninen menetelmä, jonka avulla voidaan löytää väitelauseen totuusjakauma, mikäli sellainen on olemassa. Menetelmällä voidaan testata väitelauseen validiteettia tutkimalla lauseiden ristiriitaisuutta. Semanttista puuta aletaan rakentaa tutkittavasta väitelauseesta lähtien. Väitelauseesta haarautuu oksia, joista voi yhä edelleen haarautua lisää oksia. Oksat haarautuvat konnektiivisääntöjen mukaisesti. [5]

Esimerkki 4.8. Lauseesta $A \lor B$ haarautuvat oksat seuraavasti:

$$\begin{array}{ccc} & A \lor B & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & B \end{array}$$

Jos tutkittavana kohteena on väitelause, jossa on implikaatio, voidaan se jakaa kahteen haaraan hyödyntämällä implikaation disjunktiivista muotoa. [5] Alla olevassa lauseessa todistetaan implikaation disjunktiivinen muoto.

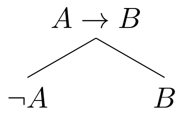
Lause 4.10. $A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$ [5]

Todistus.

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \lor B$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Totuustaulun perusteella implikaatio $A \to B$ on loogisesti ekvivalentti disjunktion $\neg A \vee B$ kanssa. $\square$

Esimerkki 4.9. Lauseesta $A \to B$ haarautuvat oksat seuraavasti:



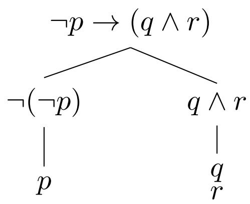
Jos haara on ristiriitainen, niin sanotaan, että se on suljettu. Haara on ristiriitainen silloin, kun samassa haarassa on jokin lause ja sen negaatio. Muussa tapauksessa sanotaan, että haara on avoin. Avoimen haaran avulla saadaan totuusjakauma, jolla tutkittava lause tulee todeksi. [5]

Kahdessa seuraavassa esimerkissä hyödynnetään seuraavassa taulukossa esitettyjä sääntöjä.

Taulukko 4.3. *Säännöt kaksoisnegaatiolle, konjunktiolle ja implikaation negaatiolle*

Kaksoisnegaatio	Konjunktio	Implikaation negaatio
$\neg\neg A$ $\vert$ A	$A \wedge B$ $\vert$ A B	$\neg(A \to B)$ $\vert$ A $\neg B$

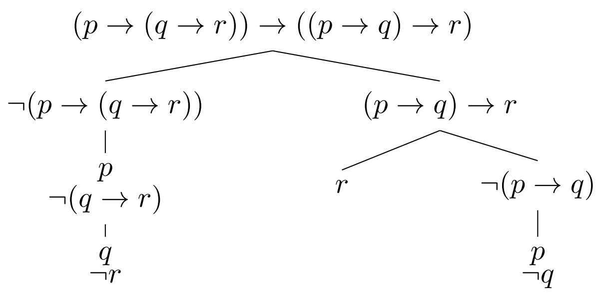
Esimerkki 4.10. Lauseen A on $\neg p \to (q \wedge r)$ semanttinen puu on



Totuusarvo $v(A) = 1$, jos totuusarvo $v(p) = 1$ tai $v(q \wedge r) = 1$ eli $A \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$. [16]

Esimerkki 4.11. Lauseen $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to r)$ disjunktiivinen normaalimuoto voidaan muodostaa semanttisen puun avulla.

Muodostetaan lauseelle semanttinen puu.



Kaikki haarat ovat avoimia ja niistä saadaan muodostettua DNF-muoto [16]

$$(p \land q \land \neg r) \lor (p \land \neg q) \lor r.$$

4.3.4 Turingin kone

Turingin koneen (engl. Turing machine) määritelmä on keskeinen asia SAT-ongelman ymmärtämisessä. Turingin koneen kehitti ensimmäisenä Alan Turing vuonna 1936. Churchin-Turingin teesin mukaan kaikki laskettavissa oleva on laskettavissa Turingin koneella. Turingin kone on rajoittamattoman määrän muistia omaava automaatti, jolla voi käsitellä muistialkioita täysin mielivaltaisessa järjestyksessä. Turingin koneen peruskomponentteihin kuuluvat tilat (engl. state), nauha (engl. tape) ja luku-kirjoituspää (engl. read/write head). Tiloja on äärellinen joukko, johon kuuluvat muun muassa hylkäävä ja hyväksyvä lopputila. Jos hyväksyvää tai hylkäävää lopputilaa ei ole olemassa, laskenta ei koskaan pääty. Koneen nauha on rajoittamattoman pituinen. Alussa nauha sisältää vain syötteen ja muissa nauhan paikoissa on tyhjä merkki (engl. blank symbol). Laskennan aikana nauha toimii tarvittaessa apumuistina. Luku-kirjoituspää liikkuu vasemmalle ja oikealle ja osoittaa aina nauhalla sitä symbolia, joka on seuraavana vuorossa. [32]

Määritelmä 4.10. *Turingin kone* on seitsikko (Q, Σ, Γ, σ, q_0, q_{accept}, q_{reject}), missä

- Q on äärellinen tilajoukko,
- Σ on äärellinen syöteaakkosto, joka ei sisällä tyhjää merkkiä $\sqcup$,
- Γ on äärellinen nauha-aakkosto (engl. tape alphabet), missä $\sqcup \in \Gamma$ ja $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- $\sigma : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ on siirtymäfunktio, missä L tarkoittaa luku-kirjoituspään siirtämistä vasemmalle ja R oikealle.
- $q_0 \in Q$ on koneen alkutila,
- $q_{accept} \in Q$ on koneen hyväksyvä lopputila ja
- $q_{reject} \in Q$ on koneen hylkäävä lopputila, missä $q_{reject} \neq q_{accept}$. [32]

Havainnollistetaan Turingin koneen siirtymäfunktiota. Jos kone on tietyssä tilassa q, luku-kirjoituspää nauhalla symbolin a kohdalla ja siirtymäfunktio $\sigma(q, a) = (r, b, L)$, niin kone kirjoittaa symbolin b symbolin a tilalle ja siirtyy tilaan r. Kirjoitettuaan symbolin b kone siirtyy nauhalla kolmannen komponentin osoittamalla tavalla. Tässä tapauksessa kolmas komponentti on L, joten luku-kirjoituspää siirtyy nauhalla vasemmalle. [32]

Määritellään myös epädeterministinen Turingin kone, joka on muuten vastaava kuin deterministinen Turingin kone, mutta sen siirtymäfunktio on erilainen. Epädeterministisen Turingin koneen siirtymäfunktio on

$$\sigma : Q \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Siinä sallitaan samasta tilasta samalla nauhamerkillä useampi kuin yksi siirtymä. Epädeterministinen Turingin kone hyväksyy syötteen, jos siirtymien valitseminen onnistuu niin, että laskenta päättyy hyväksyvään tilaan. [32] Turingin koneella laskemiseen liittyy seuraava määritelmä.

Määritelmä 4.11. Joukko Σ^* tarkoittaa kaikkia joukkoon Σ kuuluvista symboleista muodostettuja merkkijonoja. Joukko Γ^* puolestaan tarkoittaa kaikkia joukkoon Γ kuuluvista symboleista muodostettuja merkkijonoja. [12]

Turingin koneella $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sigma, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ laskeminen onnistuu seuraavasti. Aluksi kone M vastaanottaa syötteen $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$. Vasemmassa reunasta alkaen olevissa nauhan paikoissa on sanan w merkit. Niiden jälkeen loput nauhan paikat on täytetty tyhjillä merkeillä. Luku-kirjoituspää aloittaa lukemisen nauhan vasemmanpuolimmaisesta paikasta. Σ ei sisällä tyhjää merkkiä, joten ensimmäinen tyhjä-merkki tulee vasta syötteen jälkeen. Laskeminen etenee siirtymäfunktiossa kuvattujen sääntöjen mukaan. Luku-kirjoituspää ei kuitenkaan koskaan liiku yli nauhan vasemman puolimmaisesta päästä, vaikka siirtymäfunktio antaisi arvon L, joka tarkoittaa luku-kirjoituspään vasemmalle siirtymistä. Laskenta jatkuu niin kauan, kunnes luku-kirjoituspää osuu joko hyväksyttävään tai hylkäävän lopputilaan. [32]

Turingin koneen tilanne (engl. configuration) on nimitys kolmelle komponentille: koneen tilalle, nauhan sisällölle ja nauhan luku-kirjoituspään sijainnille. Tilanne kuvataan useimmiten tietyllä tavalla. Tilalle $q \in Q$ sekä kahdelle merkkijonolle $u \in \Gamma^*$ ja $v \in \Gamma^*$ voidaan kirjoittaa tilanne uqv. Tällöin nauhan sisältö on uv ja luku-kirjoituspää sijaitsee merkkijonon v ensimmäisen symbolin kohdalla. [32] Määritellään vielä Turingin koneen käyttämä kieli.

Määritelmä 4.12. *Turingin koneen tunnistama kieli* $L(M)$ on sellaisten merkkijonojen kokoelma, joilla Turingin kone saavuttaa hyväksyttävän lopputilan. [12]

4.3.5 SAT-ongelma

Propositiologiikan toteutuvuusongelmaa (SAT-ongelma) [eng. Boolean SATisfiability problem] kuuluu NP-täydellisiin ongelmiin. Jotta voidaan tarkemmin kertoa NP-täydellisistä ongelmista, määritellään seuraavat käsitteet. [2]

Määritelmä 4.13. Funktiolla $f(n)$ on *asymptoottinen yläraja* $O(g(n))$ silloin, kun on olemassa vakio c niin, että $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ kaikilla arvoilla $n > 0$. [12]

Määritelmä 4.14. *Polynominen aika* tarkoittaa suoritusaikaa, jota voidaan kuvata funktiolla, jolla on asymptoottinen yläraja $O(p(n))$, missä p on polynomifunktio ja n on syötteen pituus. [12]

Vaativuusluokkaan P kuuluvat ongelmat, jotka ovat ratkaistavissa deterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa. Niiden ratkaiseminen on siis tehokasta. NP-vaativuusluokan ongelmat ovat puolestaan epädeterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa ratkeavia ongelmia. Näiden ongelmien ratkaisuun deterministisesti ei tunneta tehokkaampaa tapaa kuin kone, joka vaatii eksponentiaalisen ajan, mikä ei ole enää tehokasta. NP-täydelliset ongelmat ovat NP-vaativuusluokan osajoukko, joka koostuu kaikkein vaativimmista NP-vaativuusluokan ongelmista. Kaikki NP-vaativuusluokan ongelmat ovat palautettavissa NP-täydellisiin ongelmiin polynomisessa ajassa. Jos yksikin NP-täydellisistä ongelmista saadaan ratkaistua deterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa, niin kaikki muutkin NP-vaativuusluokan ongelmat saadaan ratkaistua deterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa. Tähän liittyy myös vahvasti ongelma siitä, ovatko vaativuusluokat P ja NP samat. Jos vaativuusluokat P ja NP olisivat samat, kaikki kyseisten luokkien ongelmat olisivat ratkaistavissa deterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa. Useimmat tutkijat kuitenkin uskovat, että luokat eivät ole samat, sillä polynomisen ratkaisualgoritmin löytämisessä ei lukuisista yrityksistä huolimatta ole onnistuttu. Ei kuitenkaan ole myöskään onnistuttu todistamaan, että ratkaisualgoritmia ei ole. Seuraavaksi käsitellään tarkemmin NP-täydellisiin ongelmiin kuuluvaa SAT-ongelmaa. [32]

Määritelmä 4.15. Literaaleista $p_1, \ldots, p_n$ koostuva lause A on *toteutuva* (eng. satisfiable), jos literaaleille on olemassa sellaiset totuusarvot, että lause A on tosi.

Esimerkki 4.12. Boolen lauseke $E = (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$ on toteutuva totuusarvoilla $v(x_2) = 1$ ja $v(x_3) = 1$ sekä totuusarvoilla $v(x_1) = 0$ ja $v(x_2) = 1$. Kaikilla muilla propositiosymboleiden totuusarvoilla lauseke E saa arvon 0. [6]

SAT-ongelmalla tarkoitetaan Boolen muuttujista $x_i \in \{1, 0\}$, missä $i = \{1, \ldots, n\}$, koostuvan konjunktiivisessa normaalimuodossa olevan lauseen toteutuvuuden ratkaisemisesta aiheutuvaa ongelmaa. [2] Useimmiten siis ajatellaan, että nopean ratkaisualgoritmin löytäminen tai sen todistaminen, ettei sellaista ole, ratkaisisi ongelman. [3]

Ongelmanratkaisuun kuluu sitä enemmän aikaa, mitä suurempi on atomilauseiden määrä n. Konjunktiivisessa normaalimuodossa olevan Boolen lausekkeen klausuulien (engl. clause) eli literaalien disjunktioiden määrää voidaan kuvata muuttujalla m. Klausuulien pituutta eli literaalien määrää yhdessä klausuulissa voidaan puolestaan kuvata muuttujalla k. [2, 32]

Esimerkki 4.13. Olkoon Boolen lauseke

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

Tällöin lausekkeen muuttujien määrä $n = 3$, klausuulien määrä $m = 5$ ja klausuulin pituus $k = 3$.

Määritellään seuraavaksi kSAT-ongelma ja käsitellään sen jälkeen joitakin sen variaatioita.

Määritelmä 4.16. *kSAT-ongelma* on SAT-ongelma Boolen lausekkeiden konjunktiiville normaalimuodolle, jossa atomilauseiden määrä on n, klausuulien määrä m ja jokaisessa klausuulissa eri literaalien määrä k on täsmälleen sama. Muuttujat $n, m, k \in \mathbb{Z}_+$. [1, 2]

Rajoitettuihin SAT-ongelmiin kuuluvat muun muassa 1SAT- ja 2SAT-ongelmat. Ne ovat

kSAT-ongelmia, joissa $k = 1$ ja $k = 2$. [2]

Esimerkki 4.14. Olkoon Boolen lauseke

$$x_1 \wedge \neg x_2.$$

Tämän lausekkeen toteutuvuuden tarkastaminen kuuluu 1SAT-ongelmiin, koska lausekkeen jokaisen klausuulin pituus on 1.

1SAT- ja 2SAT-ongelmat ovat ratkaistavissa deterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa. [2] 3SAT-ongelmien puolestaan uskotaan olevan ratkaistavissa deterministisellä Turingin koneella vain eksponentiaalisessa ajassa, mutta tätä ei ole pystytty todistamaan. [32]

Todistetaan lopuksi SAT-ongelman NP-täydellisyys. Todistuksen lähteenä on kirjailijoiden Michael R. Garey ja David S. Johnson kirjoittama kirja 'Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness' [12]. Määritellään ensin kaksi todistuksen ymmärtämisen kannalta oleellista käsitettä.

Määritelmä 4.17. *Lausejoukon* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ *konjunktio* [47]

$$\bigwedge_{1 \leq k \leq n} A_k = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} \wedge a_n$$

Määritelmä 4.18. *Lausejoukon* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ *disjunktio* [46]

$$\bigvee_{1 \leq k \leq n} A_k = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{n-1} \vee a_n$$

Lause 4.11. *SAT-ongelma on NP-täydellinen.* [12]

Todistus. Minkä tahansa Boolen lausekkeen toteutuvuus voidaan tarkistaa epädeterministisesti polynomisessa ajassa valitsemalla epädeterministisesti sopivat arvot annetun lausekkeen muuttujille ja tutkimalla polynomisessa ajassa, toteuttavatko nämä totuusarvot lausekkeen. Näin ollen SAT-ongelman toteutuvien Boolen lausekkeiden joukko kuuluu luokkaan NP. Nyt riittää todistaa, että SAT-ongelman toteutuvien Boolen lausekkeiden joukkoon voidaan palauttaa polynomisessa ajassa mikä tahansa luokan NP joukko.

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sigma, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ epädeterministinen Turingin kone, joka toimii polynomisessa ajassa ja joka tunnistaa kielen $L(M)$. Vaaditun palautuksen toteuttava funktio $f_M(x)$ voidaan määritellä koneen M toiminnan perusteella. Funktion $f_M(x)$ on muunnettava kone M ja sen syöte x Boolen lausekkeeksi F_x. Lausekkeen F_x täytyy olla toteutuva täsmälleen silloin, kun kone M hyväksyy sille annetun syötteen x.

Olkoon $p(n)$ polynomi, joka antaa ylärajan koneen M suoritusajalle, kun syötteen pituus $n \in \mathbb{Z}_+$. Käytetään koneen tiloista merkintää $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_r\}$ ja nauha-aakkostosta merkintää $\Gamma = \{s_0 = \llcorner\!\lrcorner, s_1, \ldots, s_m\}$. Syötteellä, jonka pituus on n, voidaan edetä nauhalla korkeintaan kohtaan $p(n)+1$ asti, sillä kone M toimii ajassa $p(n)$. Sovitaan, että 'hetkellä t' tarkoittaa samaa kuin 'koneen tehtyä t askelta'. Syötettä x vastaavan Boolen lausekkeen

F_x muodostamiseen käytetään seuraavassa taulukossa olevia muuttujia.

Taulukko 4.4. *Boolen lausekkeen F_x muodostamiseen tarvittavat muuttujat.*

Tyyppi	Indeksi	Merkitys
$q[t, k]$	$0 \leq t \leq p(n)$	Kone M on tilassa q_k hetkellä t.
	$0 \leq k \leq r$	
$h[t, i]$	$0 \leq t \leq p(n)$	Koneen M luku-kirjoituspää on kohdassa i hetkellä t.
	$1 \leq i \leq p(n) + 1$	
$s[t, i, j]$	$0 \leq t \leq p(n)$	Nauhan kohdassa i on merkki s_j hetkellä t.
	$1 \leq i \leq p(n) + 1$	
	$0 \leq j \leq m$	

Muodostetaan muuttujista sellainen lauseke F_x, että on olemassa lausekkeen F_x toteuttava totuusjakauma, jos ja vain jos F_x vastaa sellaista koneen M laskentaa, joka hyväksyy syötteen x. Olkoon $F_x = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge G_6$. Klausuuli G_i, missä $i = 1, \ldots, 6$, vastaa jotakin koneen M toimintaan liittyvää rajoitusta. Seuraavassa taulukossa on listattuna klausuulit ja niitä vastaavat merkitykset, jotka antavat tietyt rajoitukset koneen M toiminnalle.

Taulukko 4.5. *Klausuulit G_i ja niitä vastaavat merkitykset*

Klausuuli	Merkitys
G_1	Koneen M tila on yksikäsitteisesti määrätty kullakin hetkellä t.
G_2	Koneen M luku-kirjoituspään paikka on yksikäsitteisesti määrätty kullakin hetkellä t.
G_3	Kussakin nauhan luku-kirjoitus -kohdassa on yksikäsitteisesti määrätty merkki kullakin hetkellä t.
G_4	Kone M on alkutilassaan hetkellä 0; nauhan alussa on syöte x ja sen jälkeen nauhalla on vain tyhjiä merkkejä.
G_5	Kone M on hyväksyttävässä lopputilanteessa hetkellä $p(n)$.
G_6	Kone M siirtyy hetken t tilanteesta hetken $t + 1$ tilanteeseen yhdellä siirtymärelaation mukaisella askeleella kullakin hetkellä t, kun $0 \leq t \leq p(n) - 1$.

Klausuulien G_i lausekkeet muodostuvat seuraavan taulukon mukaisesti.

Taulukko 4.6. *Klausuulit G_i ja niiden lausekkeet.*

Klausuuli	Lauseke
G_1	$\left(\bigwedge_{0\le t\le p(n)}\left(\bigvee_{0\le k\le r} q[t,k]\right)\right)\wedge\left(\bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)\\0\le k<k'\le r}}\neg\left(q[t,k]\wedge q[t,k']\right)\right)$
G_2	$\left(\bigwedge_{0\le t\le p(n)}\left(\bigvee_{1\le i\le p(n)+1} h[t,i]\right)\right)\wedge\left(\bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)\\1\le i<i'\le p(n)+1}}\neg\left(h[t,i]\wedge h[t,i']\right)\right)$
G_3	$\left(\bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)\\1\le i\le p(n)+1}}\left(\bigvee_{0\le j\le m} s[t,i,j]\right)\right)\wedge\left(\bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)\\1\le i\le p(n)+1\\0\le j<j'\le m}}\neg\left(s[t,i,j]\wedge s[t,i,j']\right)\right)$
G_4	$q[0,0]\wedge h[0,1]\wedge\left(\bigwedge_{1\le i\le n} s[0,i,j_i]\right)\wedge\left(\bigwedge_{n+1\le i\le p(n)+1} s[0,i,0]\right),$ kun $x = s_{j1}s_{j2}\dots s_{jn}$
G_5	$q[p(n),k]$, missä $q_k = q_{accept}$
G_6	$G_6'\wedge G_6''$, missä $G_6' = \bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)-1\\1\le i\le p(n)+1\\0\le j\le m}}\left((s[t,i,j]\wedge\neg h[t,i])\to s[t+1,i,j]\right)$ ja $G_6'' = \bigwedge_{\substack{0\le t\le p(n)-1\\1\le i\le p(n)+1\\0\le k\le r\\0\le j\le m}}\left(q[t,k]\wedge h[t,i]\wedge s[t,i,j]\right)$ $\to \bigvee_{(q_{k'},s_{j'},\triangle)\in\sigma(q_k,s_j)}\left(q[t+1,k']\wedge h[t+1,i+\triangle]\wedge s[t+1,i,j']\right),$ kun $\triangle$ voi saada arvot -1 ja 1.

Taulukossa 4.6 esiintyvän muuttujan $\triangle$ arvot -1 ja 1 vastaavat luku-kirjoituspään liikkeitä L ja R. Taulukon 4.6 klausuuli G_6' takaa kohdassa i olevan merkin samana pysymisen, jos luku-kirjoituspää ei ole juuri siinä kohdassa ja klausuuli G_6'' takaa koneen M tilan, luku-kirjoituspään sijainnin ja pään kohdalla oleva merkin muuttumisen siirtymärelaation mukaisesti.

Jos syöte x kuuluu kieleen L_M, niin lausekkeelle $F_x = G_1\wedge G_2\wedge G_3\wedge G_4\wedge G_5\wedge G_6$ on olemassa koneella M polynomisessa ajassa hyväksyvä laskenta. Kieli $L(M)$ voidaan siis palauttaa polynomisesti SAT-ongelman toteutuvien Boolen lausekkeiden joukkoon, joten SAT-ongelma on NP-täydellinen. $\square$

Huomattakoon, että SAT-ongelmat voidaan edelleen palauttaa polynomisesti 3SAT-ongelmiksi, joten myös 3SAT-ongelma on NP-täydellinen. [32]

4.4 Propositiologiikan kehityskaaren analysointi

Luvussa 3 esitettyjen matemaattisen ajattelun mallien mukaan tieto rakentuu tasoittain. Propositiologiikan kehityskaarenkin voidaan ajatella koostuvan eri tasoista. Tasot jakautuvat hieman eri tavoin riippuen siitä, mitä matemaattisen ajattelun mallia käyttää. Tasolta seuraavalle eteneminen vaatii kuitenkin kaikissa Luvun 3 malleissa aina edeltävän tason asioiden hallintaa. Tämän takia myös propositiologiikan kehityskaaressa etenemisen edellytyksenä on aiempien tasojen tietojen hallinta. Jos osa aiemmista tiedoista on puutteellisia, voi palata tasoja takaisin päin ja kerrata tarvittavat asiat. Luvussa 3 esitetyn konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan opiskelija tulkitsee uutta tietoa aiempien tietojensa pohjalta. Tämä tukee siis käsitystä siitä, että aiemmat tiedot aiheesta täytyy olla tarpeeksi kattavat, minkä vuoksi voidaan myös ajatella, että oppiminen tapahtuu jonkinlaista kehityskaarta noudattaen.

Tässä luvussa esitetty propositiologiikan kehityskaari lähtee liikkeelle väitelauseiden tunnistamisesta ja muodostamisesta loogisten konnektiivien avulla, mikä edellyttää loogisten konnektiivien määritelmien tuntemista. Lisäksi yksinkertaisia väitelauseita todistetaan totuustaulujen avulla. Tämän jälkeen väitelauseiden todistamiseen saadaan apuvälineiksi myös aksioomia ja yksinkertaisia päättelysääntöjä. Nyt todistuksen voikin tehdä Esimerkin 4.3 tavalla eli kirjoittaa allekkain todistuksen välivaiheet ja kunkin välivaiherivin loppuun selitys, mistä rivillä oleva muoto saadaan. Lisäksi apuvälineiksi saadaan tässä kohtaa semanttiset puut, joita voi käyttää väitelauseiden totuusarvojen päättelyssä.

Aksioomat, päättelysäännöt ja semanttiset puut liittyvät pitkälti luonnolliseen päättelyyn, jonka voidaan sanoa olevan yksi propositiologiikan haara. Ne ovat kuitenkin myös propositiologiikan perusasioita, jotka on hyvä osata etenipä sitten, mihin propositiologiikan haaraan tahansa. Tässä työssä kehityskaari jatkuu kohti SAT-ongelmaa, joten on tärkeää osata väitelauseiden normaalimuoto, joka opetetaan yliopiston ensimmäisillä logiikan kursseilla. Lisäksi on tunnettava Turingin koneen määritelmä ja toimintaperiaate sekä osattava soveltaa jonkin verran muita kehityskaaressa aiemmin tulleita asioita, jotta työssä kehityskaaren päätteenä oleva SAT-ongelman NP-täydellisyys todistus voidaan ymmärtää.

5 TUKIPAKETIN HYÖDYLLISYYS OPISKELIJAN NÄKÖKULMASTA

Tarkastellaan tukimateriaalien hyödyllisyyttä opiskelijan näkökulmasta tutkimalla opiskelijoiden kokemuksia tukimateriaaleista ja laskuharjoitustilaisuudesta sekä tukimateriaalien tekemisaktiivisuuden vaikutusta kurssin arvosanaan. Lisäksi tutkitaan, vaikuttaako perustaitotestin arvosana tukimateriaalien tekemisaktiivisuuteen.

Tukiharjoitukset järjestettiin kahdelle rinnakkaiselle Insinöörimatematiikan toteutuskerralle: Insinöörimatematiikka B1 ja Insinöörimatematiikka C1. Insinöörimatematiikka B1 -kurssin osallistujat olivat bio-, sähkö- ja tietotekniikan opiskelijoita. Kurssille ilmoittautuneita opiskelijoita oli 305. Insinöörimatematiikka C1 -kurssin osallistujat olivat automaatio-, kone-, materiaali- sekä ympäristö- ja energiatekniikan opiskelijoita. Kurssille ilmoittautui 209 opiskelijaa. Insinöörimatematiikka B1 -kurssin toteutus oli melko perinteinen. Se siis koostui luennoista ja kurssin laskuharjoituksista. Perinteisimmästä toteutuksesta poiketen laskuharjoituksia oli kahdet viikossa yksien sijaan. Niiden lisäksi opiskelijan oli mahdollista osallistua tukiharjoituksissa. Insinöörimatematiikka C1 -kurssin toteutuksessa puolestaan hyödynnettiin käänteisiä opetusmenetelmiä, joten siinä ei ollut luentoja ja tehtäviä tehtiin huomattavasti enemmän kuin Insinöörimatematiikka B1 -kurssilla. Myös Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijoilla oli lisäksi mahdollisuus osallistua tukiharjoituksiin. Tukiharjoitukset olivat kummallekin toteutuskerralle toteutettu hyvin samalla tavalla. Molemmissa harjoituksissa laskettiin samoja tehtäviä. Ainoana erona oli, että Insinöörimatematiikka B1 -kurssin opiskelijoiden tukiharjoituksissa käytiin aluksi yhteisesti läpi kyseisen viikon tehtäviin liittyvä teoria, kun taas Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijat opiskelivat kyseisen teorian itsenäisesti.

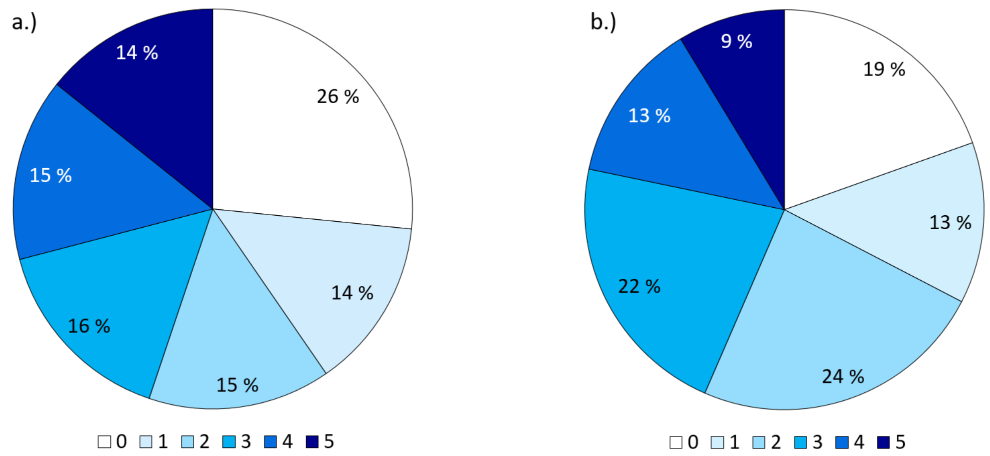
Opiskelijoiden kurssin alussa tekemän perustaitotestin maksimipistemäärä oli 16 pistettä. Perustaitotestin teki 231 Insinöörimatematiikka B1 -kurssin tutkimusluvan antanutta opiskelijaa. Kaiken kaikkiaan tutkimusluvan antoivat 251 opiskelijaa. Seuraavissa tuloksissa on tarkasteltu tutkimusluvan antaneiden opiskelijoiden tuloksia. Perustaitotestin pisteiden keskiarvo oli B1 -toteutuskerralla 10,7 pistettä. Tukiharjoituksiin osallistuneiden B1-toteutuskerran opiskelijoiden vastaava keskiarvo oli 10,1 pistettä. B1-toteutuskerran opiskelijoista 96 sai alle keskiarvon verran pisteitä. Se on noin 42 prosenttia kaikista perustaitotestin suorittaneista.

Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijoista perustaitotestin teki 204 tutkimusluvan antanutta opiskelijaa. Kaiken kaikkiaan tutkimusluvan antaneita oli 208 opiskelijaa. Seuraavissa tuloksissa on tarkasteltu tutkimusluvan antaneiden opiskelijoiden tuloksia. Perustaitotestin keskiarvo oli C1-toteutuskerralla 11,8 pistettä. Tukiharjoituksiin osallistuneiden C1-toteutuskerran opiskelijoiden vastaava keskiarvo oli 11,4 pistettä. Alle keskiarvon verran pisteitä on saanut 90 C1-toteutuskerran opiskelijaa. Se on noin 44 prosenttia kaikista perustaitotestin suorittaneista.

B1-toteutuskerran tukiharjoitusten ensimmäisessä tilaisuudessa oli noin 75 opiskelijaa. Sen jälkeen määrä vakiintui noin 20-30 opiskelijaan. Tämän vuoksi keskitytään tarkastelemaan muiden kuin ensimmäisen kerran osallistumisaktiivisuutta B1-toteutuskerran osalta. C1-toteutuskerralla osallistujia oli kaikkina seitsemänä tukiharjoituskertana melko saman verran, joten osallistumisaktiivisuutta tarkastellaan C1-toteutuskerran osalta kaikkina kertoina. Kaikista opiskelijoista tukiharjoituksiin osallistui B1-toteutuskerralla 18,7 prosenttia ja C1-totetutuskerralla 22 prosenttia vähintään kerran. B1-toteutuskerran opiskelijoista, jotka saivat perustaitotestistä alle keskiarvon verran pisteitä, osallistui tukiharjoituksiin 26 prosenttia vähintään kerran. C1-toteutuskerralla vastaava prosenttiosuus oli 29. B1-toteutuskerran opiskelijoista, jotka saivat perustaitotestistä keskiarvon verran tai enemmän pisteitä, osallistui tukiharjoituksiin 16 prosenttia. C1-toteutuskerralla vastaava prosenttiosuus oli 18. Lisäksi tukiharjoituksiin osallistui B1-toteutuskerralla 1 opiskelija, joka ei ollut suorittanut perustaitotestissä lainkaan. C1-toteutuskerralla vastaava määrä oli 2 opiskelijaa. Tukiharjoituksiin osallistui hieman enemmän opiskelijoita, jotka olivat jääneet perustaitotestin keskiarvon alapuolelle.

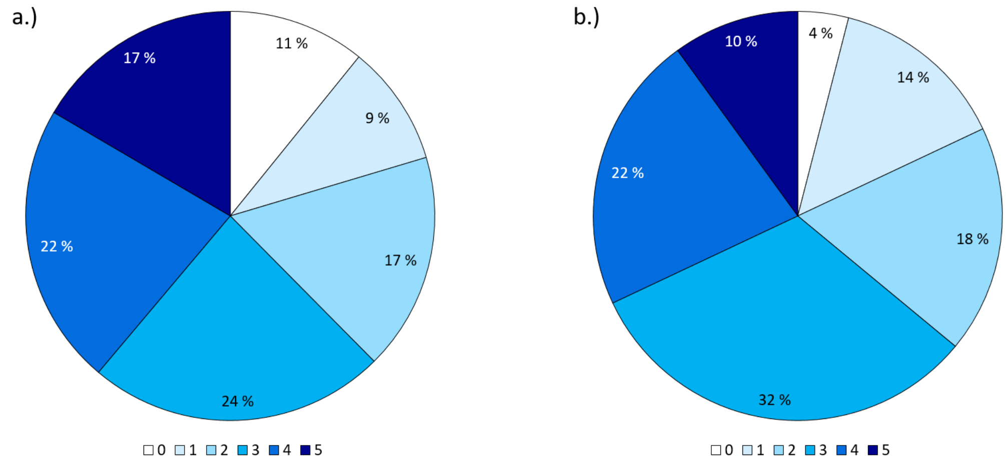
B1-toteutuskerralla kullakin viikolla tukiharjoituksiin osallistui keskimäärin 7,5 prosenttia kurssille ilmoittautuneista opiskelijoista. B1-toteutuskerran tukiharjoituksissa osallistui siis noin 23 opiskelijaa per viikko. C1-toteutuskerralla tukiharjoituksiin osallistui kullakin viikolla keskimäärin 5,9 prosenttia kurssille ilmoittautuneista opiskelijoista. C1-toteutuskerran tukiharjoituksiin osallistui siis noin 16 henkilöä per viikko. B1-toteutuskerran tukiharjoituksiin osallistuivat siis useammin samat opiskelijat ja C1-toteutuskerralla vaihtuvuus oli suurempaa ja harjoituksiin osallistuivat useat opiskelijat vain yksittäisiä kertoja.

Tenttimenestystä tarkasteltiin tukiharjoituksiin osallistuneiden ja osallistumattomien opiskelijoiden välillä. Lopputentin tehneistä B1-toteutuskerran opiskelijoista tukiharjoituksiin osallistuneita oli 46 ja osallistumattomia 203. C1-toteutuskerran vastaavat määrät olivat 50 ja 157. Tukiharjoituksiin osallistuneiden ja ei-osallistuneiden tenttiarvosanat jakautuivat B1-toteutuskerralla seuraavan kuvan mukaisesti. Jakaumissa ovat mukana myös opiskelijat, jotka eivät suorittaneet perustaitotestiä lainkaan.



Kuva 5.1. *a.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin. b.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvan 5.1 perusteella huomataan, että tukiharjoituksiin osallistuneiden B1-toteutuskerran opiskelijoiden arvosanat painottuvat arvosanoihin 2 ja 3, kun taas tukiharjoituksiin osallistumattomien arvosanat jakautuivat tasaisemmin arvosanojen 1–5 kesken. Arvosanalla nolla tarkoitetaan hylättyä. Hylätyn osuus muista arvosanoista oli tukiharjoituksiin osallistuneilla pienempi kuin tukiharjoituksiin osallistumattomilla. Seuraavassa kuvassa on esitetty C1-toteutuskerran vastaavat arvosanajakaumat.

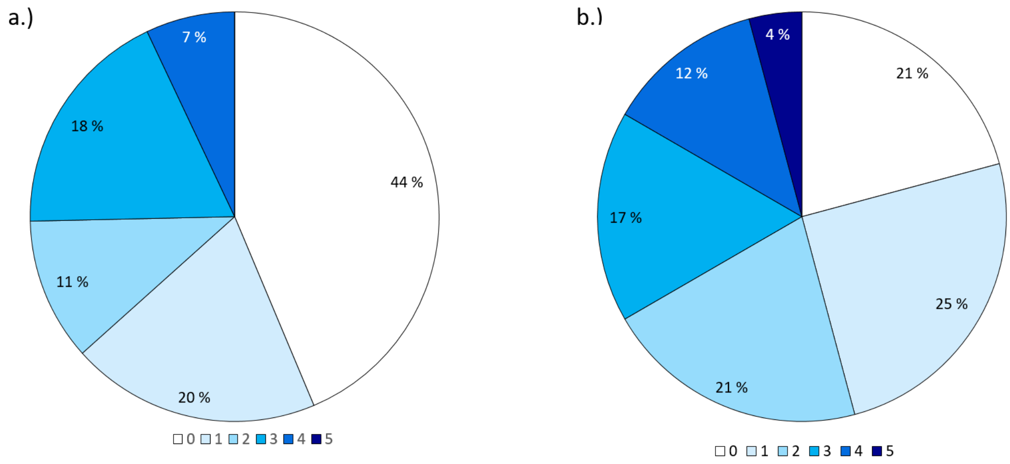


Kuva 5.2. *a.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin. b.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvan 5.2 perusteella huomataan, että C1-toteutuskerran opiskelijoiden arvosanajakaumat ovat muuten hyvin samankaltaiset, mutta tukiharjoituksiin osallistuneet ovat saaneet huomattavasti harvemmin hylätyn arvosanan kuin tukiharjoituksiin osallistumattomat.

B1- ja C1-kurssien toteutustavat ovat keskenään erilaiset, joten päättöarvosanoja ei voi vertailla keskenään.

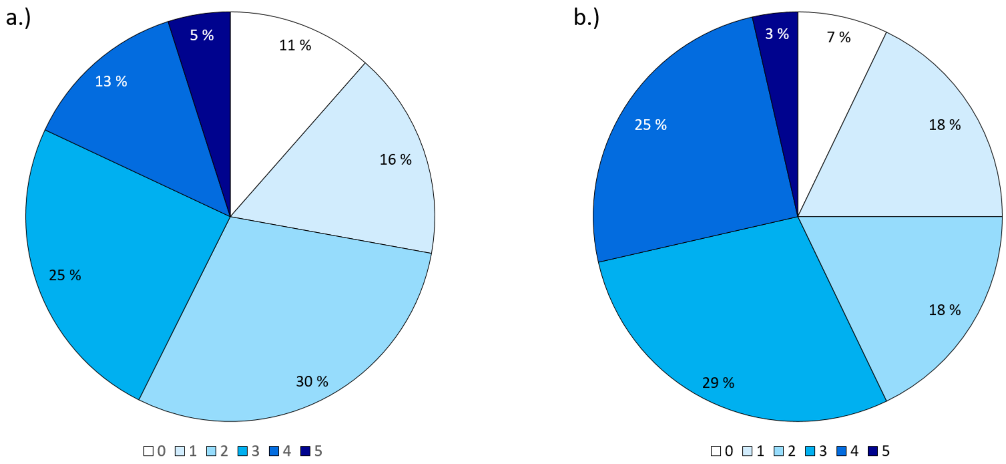
Tarkastellaan perustaitotestiin osallistuneiden opiskelijoiden kurssin päättöarvosanoja. Seuraavassa kuvassa on esitetty alle perustaitotestin keskiarvon jääneiden B1-toteutuskerran opiskelijoiden päättöarvosanajakaumat. Alle keskiarvon jääneitä ja tukiharjoituksiin osallistumattomia opiskelijoita oli 71 kappaletta, kun taas alle keskiarvon jääneitä ja tukiharjoituksiin osallistuneita oli 24 kappaletta.



Kuva 5.3. *a.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä. b.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvassa 5.3 olevien jakaumien perusteella huomataan, että tukiharjoituksiin osallistuneet ovat päässeet useammin kurssista läpi kuin sellaiset, jotka eivät ole tukiharjoituksiin osallistuneet lainkaan. Tukiharjoituksiin osallistumattomat ovat saaneet eniten arvosanoja yksi ja kolme eivätkä he ole saaneet lainkaan arvosanaa viisi, kun taas tukiharjoituksiin osallistuneista pieni osuus on saanut myös arvosanan viisi. Useimmat tukiharjoituksiin osallistuneista ovat saaneet arvosanan yksi tai kaksi.

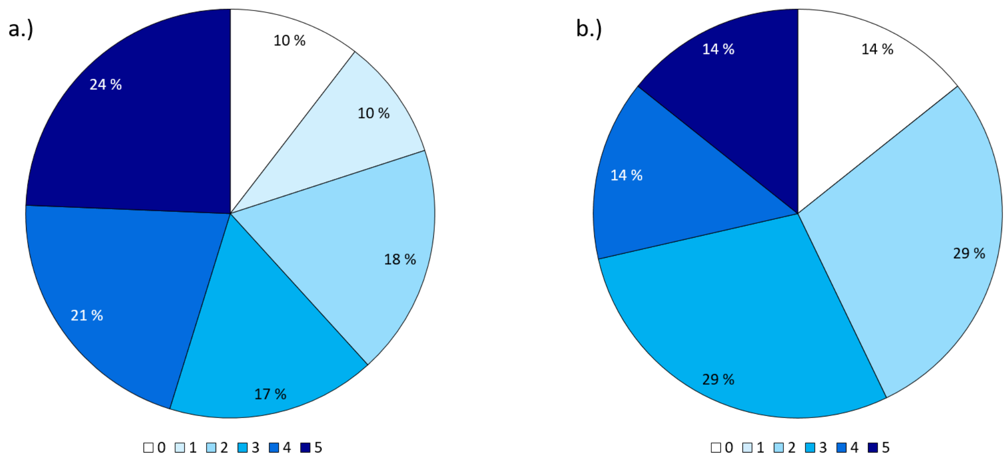
Seuraavassa kuvassa on esitelty C1-toteutuskerran vastaavat tulokset. C1-toteutuskerralla perustaitotestistä alle keskiarvon jääneiden ja tukiharjoituksiin osallistumattomien opiskelijoiden määrä oli 61 kappaletta. Alle keskiarvon jääneitä ja tukiharjoituksiin osallistuneita oli puolestaan 28 kappaletta.



Kuva 5.4. *a.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä. b.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvan 5.4 perusteella voidaan tehdä vastaava havainto kuin B1-toteutuskerran osalta. Tukiharjoituksiin osallistuminen on siis lisännyt kurssin läpipäässeiden osuutta. Tukiharjoituksiin osallistuneet ovat saaneet suhteessa enemmän arvosanoja 3 ja 4 kuin tukiharjoituksiin osallistumattomat. Tukiharjoituksiin osallistumattomat ovat saaneet eniten arvosanoja kaksi ja tukiharjoituksiin osallistuneet eniten arvosanoja kolme.

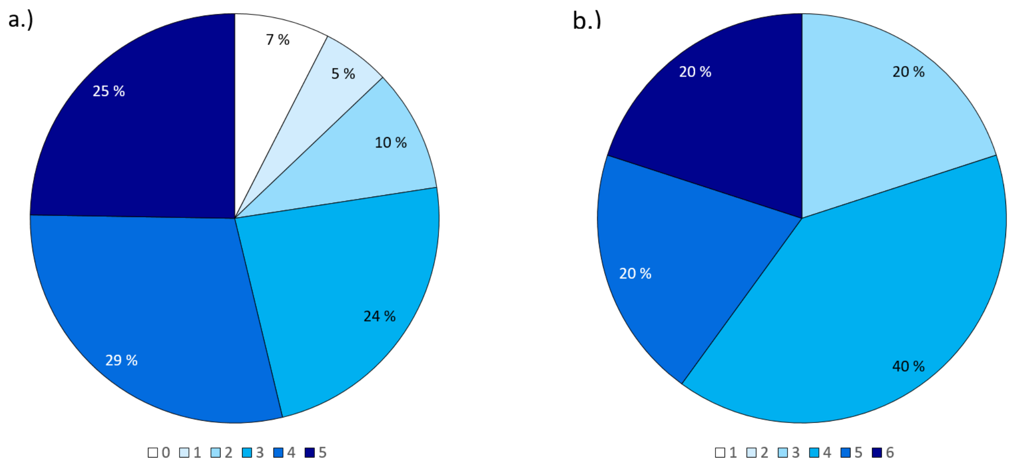
Tarkastellaan perustaitotestissä yli keskiarvon saaneiden kurssin päättöarvosanajakaumia. Perustaitotestissä yli keskiarvon verran pisteitä saaneiden ja tukiharjoituksiin osallistumattomien opiskelijoiden lukumäärä oli 115. Yli keskiarvon verran pisteitä saaneiden ja tukiharjoituksiin osallistuneiden määrä oli puolestaan 21. Seuraavassa kuvassa on esitetty B1-toteutuskerran ylikeskiarvon verran perustaitotestistä saaneiden päättöarvosanajakaumat.



Kuva 5.5. *a.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestissä yli sen keskiarvon verran pisteitä. b.) B1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestissä yli sen keskiarvon verran pisteitä. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvan 5.5 perusteella voidaan päätellä, että tukiharjoitukset eivät parantaneet läpipääsyprosenttia perustaitotestistä yli keskiarvon verran saaneiden osalta. Jos opiskelija kuitenkin tukiharjoituksiin osallistuttuaan suoritti myös kurssin hyväksytysti, sai hän kurssista vähintään arvosanan kaksi. Opiskelijat, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin saivat satunnaisesti myös arvosanan yksi. Tukiharjoituksiin osallistuneet saivat useimmiten arvosanaksi joko kaksi tai kolme, kun taas niihin osallistumattomat saivat useimmiten arvosanan neljä tai viisi.

Seuraavassa kuvassa tarkastellaan C1-toteutuskerran perustaitotestistä yli keskiarvon verran pisteitä saaneiden opiskelijoiden päättöarvosanoja. Perustaitotestissä yli keskiarvon verran pisteitä saaneiden ja tukiharjoituksiin osallistumattomien opiskelijoiden lukumäärä oli C1-toteutuskerralla 93. Yli keskiarvon verran pisteitä saaneiden ja tukiharjoituksiin osallistuneiden määrä oli puolestaan 20.



Kuva 5.6. *a.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestissä yli sen keskiarvon verran pisteitä. b.) C1-toteutuskerran niiden opiskelijoiden arvosanajakauma, jotka osallistuivat tukiharjoituksiin ja saivat perustaitotestissä yli sen keskiarvon verran pisteitä. Arvosanat 0–5 ovat kuvassa eri värein. Arvosana nolla tarkoittaa hylättyä.*

Kuvan 5.6 perusteella kaikki tukiharjoituksiin osallistuneet ja perustaitotestistä yli keskiarvon verran pisteitä saaneet opiskelijat suorittivat kurssin hyväksytysti. Suurin osa sai arvosanan kolme, eikä kukaan saanut arvosanaa yksi. Tukiharjoituksiin osallistumattomista ja perustaitotestistä yli keskiarvon verran pisteitä saaneista opiskelijoista 7 prosenttia sai hylätyn arvosanan. Muut saivat useimmiten joko arvosanan kolme, neljä tai viisi.

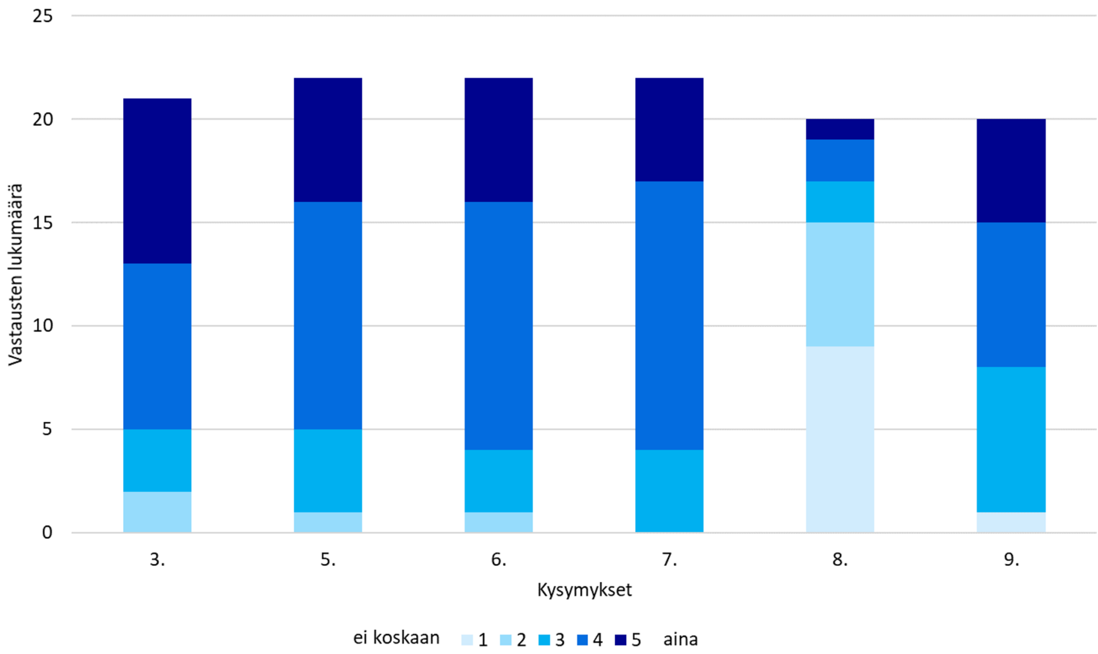
Tutkimustuloksia saatiin myös opiskelijoille teetetyn kyselyn avulla. Kyselyn avulla pyrittiin selvittämään, minkälaisiksi opiskelijat kokivat tukimateriaalit, mitkä asiat onnistuivat tukimateriaalien suunnittelussa hyvin ja mitä voisi muokata ennen seuraavaa tukimateriaalipaketin käyttökertaa. Lisäksi opiskelijoille annettiin mahdollisuus vapaaseen sanaan koskien tukimateriaaleja ja tukiharjoituksia. Kyselylomake on työn liitteenä.

Tukiharjoituksiin liittyvä kysely teetettiin opiskelijoille, jotka osallistuivat joko B1- tai C1-toteutuskerran tukiharjoituksiin kahdella viimeisellä tukiharjoituskerralla. Vastauksia saatiin B1-toteutuskerralla 22 opiskelijalta ja C1-toteutuskerralla 12 opiskelijalta. Kummankin kurssin kyselyn vastausjakaumat ovat esitetty erikseen kahdessa seuraavassa kuvassa.

Kyselyssä oli seuraavat väitteet:

3. Tukiharjoituksiin osallistumisesta oli hyötyä Insinöörimatematiikka B1/C1 -kurssin kyseisen aihepiirin asioiden ymmärtämisessä.
5. Tukiharjoitusten aluksi yhteisesti käyty teoria oli hyödyllistä.
6. Tehtäväsarjojen alussa oleva teoria auttoi tehtävien ratkaisemisessa.
7. Tehtäväkohtaiset vihjeet auttoivat tehtävän ratkaisemisessa.
8. Katsoin tukimateriaaleihin linkitettyjä videoita.
9. Aion osallistua tukiharjoituksiin Insinöörimatematiikka B2/C2 -kurssilla.

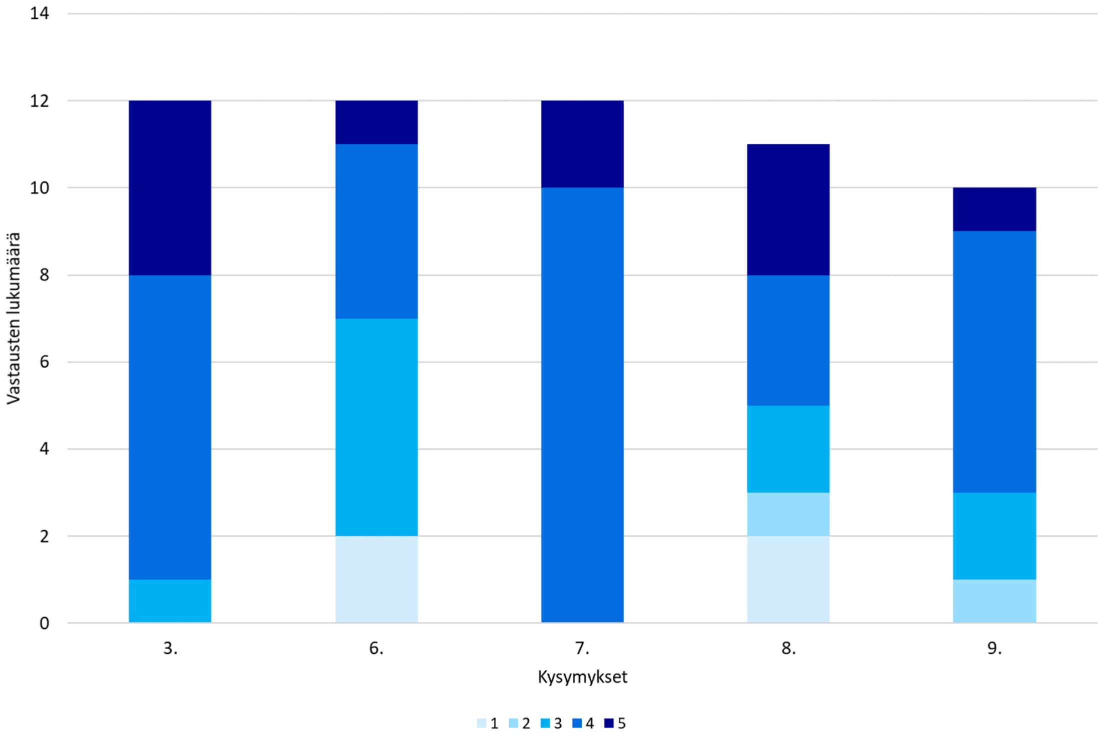
Viidettä väitettä ei ollut Insinöörimatematiikka C1 -kurssin kyselylomakkeessa, sillä heillä ei ollut tukiharjoitustilaisuuden alussa yhteistä teoriaosuutta. Seuraavassa kuvassa on esitetty Insinöörimatematiikka B1 -kurssin kyselyn tulokset. Kuvan järjestysnumerot kuvaavat kysymysten järjestysnumeroita. Jokaiseen väitteeseen oli vastausvaihtoehtoina luvut 1–5. Ääripäille oli annettu sanalliset määreet ei koskaan ja aina. Ääripäätä ei koskaan vastasi luku 1. ja toista ääripäätä luku 5. Muut vaihtoehdot olivat lineaarisesti tällä välillä. Ne on merkitty kuvaan eri väreillä.



Kuva 5.7. *B1-toteutuskerran kyselytulokset.*

Tulosten perusteella Insinöörimatematiikka B1 -kurssin opiskelijoista suurin osa koki tukiharjoituksiin osallistumisen hyödyttäneen Insinöörimatematiikka B1 -kurssin kyseisen aihepiirin asioiden ymmärtämisessä aina tai lähes aina. Tukiharjoitusten alussa yhteisesti läpikäyty teoria oli suurimman osan mielestä lähes aina tai aina hyödyllistä. Neljän opiskelijan mielestä yhteinen teoria oli joskus hyödyllistä ja yhden opiskelijan mielestä ei koskaan hyödyllistä. Opiskelijoista muutamat olivat kommentoineet vapaaseen sanaa, millä tavoin yhteistä teoriaosuutta voisi kehittää. Useimmat sanoivat, että se voisi olla visuaalisempi. Tehtäväsarjojen alussa ollut teoria oli myös suurimman osan mielestä aina tai lähes aina hyödyllistä. Yhden opiskelijan mielestä se ei ollut koskaan hyödyllistä ja kolmen opiskelijan mielestä se oli vain joskus hyödyllistä. Suurin osa opiskelijoista koki tehtäväkohtaiset vihjeet aina tai lähes aina hyödyllisiksi. Vain kolme opiskelijaa kokivat, että tehtäväkohtaisista vihjeistä on ainoastaan joskus hyötyä. Kaikkein eniten mielipiteitä jakoi tukimateriaaleihin linkitettyjen videoiden katseleminen. Suurin osa ei ollut katsonut videoita lainkaan tai oli katsonut niitä vain hyvin harvoin. Kaksi opiskelijaa oli katsonut videoita joskus ja kaksi lähes aina. Vain yksi opiskelija oli katsonut videot aina. Tukiharjoituksiin Insinöörimatematiikka B2 -kurssilla aikoo lähes aina tai aina osallistua vähän yli puolet kyselyyn vastanneista opiskelijoista. Muut aikovat osallistua joskus ja yksi ei koskaan, sillä hän on Insinöörimatematiikka B2 -kurssin jo suorittanut.

Seuraavassa kuvassa on C1-toteutuskerran kyselytulokset.



Kuva 5.8. *C1-toteutuskerran kyselytulokset.*

Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijoista suurin osa koki tukiharjoituksiin osallistumisen hyödyttäneen Insinöörimatematiikka C1 -kurssin kyseisen aihepiirin asioiden ymmärtämistä. Yksi opiskelija koki hyötyä olleen vain joskus. Tehtäväsarjojen alussa olleen teorian hyödyllisyys tehtävien ratkaisemisessa jakoi mielipiteitä. Yhden mielestä teoria oli aina hyödyllinen, neljän mielestä lähes aina, neljän mielestä joskus ja kahden mielestä ei koskaan. Tehtäväkohtaiset vihjeet koettiin aina tai lähes aina hyödyllisiksi. Opetusvideoita katsoi useimmat aina tai lähes aina. Kaksi opiskelija katsoi opetusvideoita vain joskus, yksi hyvin harvoin ja kaksi eivät katsoneet niitä koskaan. Suurin osa aikoo osallistua tukiharjoituksiin myös Insinöörimatematiikka C2 -kurssilla joko aina tai lähes aina. Kolme opiskelijaa aikoo osallistua tukiharjoituksiin vain hyvin satunnaisesti.

Lisäksi kyselyssä kysyttiin, kuinka monta kertaa kukin opiskelija on osallistunut tukiharjoituksiin ja oliko tehtävien vaikeustaso sopiva sekä annettiin mahdollisuus vapaamuotoisen palautteen antamiseen tukimateriaaleista ja -harjoituksista. Insinöörimatematiikka B1 -kurssin opiskelijoista seitsemän oli osallistunut 1–2 kertaa ja seitsemän 5–6 kertaa. Loput kahdeksan olivat osallistuneet 3–4 kertaa. Yhtä lukuun ottamatta kaikki Insinöörimatematiikka B1 -kurssin opiskelijat mielsivät tehtävien vaikeustason sopivaksi. Yhden mielestä vaikeustaso oli liian helppo. Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijoista kaikki mielsivät tehtävien vaikeustason sopivaksi. Insinöörimatematiikka C1 -kurssin opiskelijoista suurin osa kyselyyn vastanneista oli osallistunut tukiharjoituksiin ainoastaan 1–2 kertaa. Vain kaksi opiskelija oli osallistunut 5–6 kertaa ja yksi 3–4 kertaa.

Vapaamuotoista palautetta antoi Insinöörimatematiikka B1 -kurssin tukiharjoitusten osallistujista kahdeksan. Tämä on noin 45 prosenttia kaikista B1-toteutuskerran kyselyyn vastanneista. Insinöörimatematiikka C1 -kurssin osallistujista kaksi opiskelijaa antoivat vapaata palautetta, mikä on puolestaan noin 17 prosenttia kaikista C1-toteutuskerran kyselyyn vastanneista. Vapaamuotoisen palautteen perusteella tukiharjoitukset olivat mukavia ja tehtävät sekä muut materiaalit useimmiten opiskelijoiden mielestä mielekkäitä. Kommenteissa nousi esiin myös se, että käsitteiden selittäminen intuitiivisella tasolla ja visualisoiminen auttavat asian ymmärtämisessä ja sitä olisi hyvä korostaa jatkossa.

6 YHTEENVETO JA POHDINTA

Monille opiskelijoille siirtymävaihe lukio- ja yliopistomatematiikan välillä on haastava. Sen takia yliopistomatematiikan opiskelun aloittamista on pyritty tukemaan useissa eri yliopistoissa monilla eri tavoilla. Tampereen yliopiston uusimpana tukikeinona otettiin käyttöön tukiharjoitukset ja -materiaalit. Tukimateriaalipaketin avulla kerrataan pitkälti lukion pitkää matematiikkaa. Kertaamisen puolesta puhuvat useat matemaattisen ajattelun mallit sekä oppimiskäsitykset ja -strategiat. Uuden tiedon rakentuessa vanhan päälle on tärkeää hallita hyvin aiemmin opitut asiat. Jos aiemmin opittuja asioita ei hallitse, uusien asioiden oppiminen vaikeutuu. Propositiologiikan kehityskaarta on käytetty esimerkkinä tiedon rakentumisesta. Jos jokin kehityskaaren osa-alue ei ole hallinnassa, estyy useimmiten seuraavan osa-alueen oppiminen. Kehityskaaressa voi kuitenkin palata aina taakse päin ja kerrata uuden tiedon oppimisen kannalta tarpeelliset asiat.

Uutena tukimuotona käyttöön otetut tukiharjoitukset järjestettiin viikoittain aina ennen Insinöörimatematiikka 1 -kurssin kyseisen viikon luentoja. Niissä käsiteltiin useimmiten samaa asiaa kuin kurssin kyseisen viikon luennoilla. Näin ollen tukiharjoituksissa kerrattava asia saatiin yhdistettyä Insinöörimatematiikka 1 -kurssin luennoilla käytävään asiaan paremmin kuin aiemmissa kertaustehtäväpaketeissa ja opiskelijat pystyvät paremmin luomaan sidosteisuutta lukio- ja yliopistomatematiikan asioiden välille.

Kyselystä saatujen tulosten perusteella tukiharjoitukset koettiin hyödyllisiksi. B1- ja C1-toteutuskerrat olivat erilaiset, joten kursseilta saatuja arvosanoja ei voi vertailla keskenään. Kummankin kurssin opiskelijoiden kokemukset tukiharjoitustilaisuudesta olivat useimmiten myönteiset. C1-toteutuskerran opiskelijat katsoivat useammin videoita kuin B1-toteutuskerran opiskelijat. Lisäksi C1-toteutuskerran opiskelijat eivät kokeneet tehtäväsarjojen alussa olevaa teoriaa kovin hyödylliseksi toisin kuin B1-toteutuskerran opiskelijat. Syinä tähän voi olla se, että B1-toteutuskerralla harjoitusten aluksi käytiin läpi tehtäväsarjoihin liittyvää teoriaa yhteisesti, joka osittain selitti myös tehtäväsarjojen alussa ollutta teoriaa. C1-toteutuskerran opiskelijat katsoivat luultavasti samoja asioita videolta kuin B1-toteutuskerralla käytiin yhteisen osuuden aikana, joten sen vuoksi he myös katsoivat enemmän videoita. C1-toteutuskerralla painottui muutenkin itseopiskelu ja videoiden kautta opiskelu, joten heillä saattoi myös sen takia olla pienempi kynnys opetusvideoiden katsomiseen ja hyödyntämiseen oppimistapana.

Tutkimustulosten perusteella perustaitotestin suorittaneet ja tukiharjoituksiin osallistuneet opiskelijat saivat useammin hyväksytyn kurssiarvosanan kuin he, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin. Arvosanan viisi saivat useammin opiskelijat, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin. Tämä johtuu luultavasti siitä, että kyseiset opiskelijat osasivat jo tukiharjoituksissa käsiteltävät asiat, eivätkä kokeneet tukiharjoituksiin osallistumista tarpeelliseksi.

B1-toteutuskerralla tukiharjoituksiin osallistuneiden ja perustaitotestissä alle keskiarvon verran pisteitä saaneiden opiskelijoiden kurssin päättöarvosana oli huomattavasti useammin hyväksytty kuin heillä, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin, mutta saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä. Vastaavanlainen tulos on havaittavissa myös C1-toteutuskerran tuloksissa. Tukiharjoituksiin osallistuneet C1-toteutuskerran opiskelijat ovat myös useammin saaneet arvosanoja kolme tai neljä kuin he, jotka eivät osallistuneet tukiharjoituksiin, mutta saivat perustaitotestistä alle sen keskiarvon verran pisteitä.

B1-toteutuskerran opiskelijat, jotka ovat saaneet perustaitotestistä yli sen keskiarvon verran pisteitä ja osallistuneet tukiharjoituksiin, saivat hieman useammin hylätyn arvosanan kuin he, jotka suorittivat perustaitotestin keskiarvoa paremmin, mutta eivät osallistuneet tukiharjoituksiin. Tulos voi johtua siitä, että tukiharjoituksiin osallistuneet opiskelijat opiskelivat hyvin perustaitotestiä varten ja saivat siitä hyvän tuloksen, mutta turvautuivat ulkoa lukuun ja pinnalliseen oppimiseen, joten heidän osaamisensa ei ollut kuin hetkellisesti sillä tasolla, kun perustaitotestin tulos antoi ymmärtää. Kyseiset opiskelijat kuitenkin osallistuivat tukiharjoituksiin ja tiedostivat luultavasti oman osaamisen tasonsa, mutta eivät ymmärtäneet kuitenkaan kurssin asioita riittävän hyvin kurssin lopputentin läpäistäkseen.

C1-toteutuskerralla yli keskiarvon verran pisteitä perustaitotestistä saaneista ja tukiharjoituksiin osallistuneista kaikki saivat kurssiarvosanaksi vähintään kakkosen, kun taas perustaitotestistä yli keskiarvon verran pisteitä saaneista tukiharjoituksiin osallistumattomista opiskelijoista osa sai myös hylätyn tai ykkösen arvosanakseen.

Jatkossa tukiharjoitukset olisi hyvä kohdentaa entistä paremmin oikealle kohderyhmällä. Olisi hyvä, että tukiharjoituksiin osallistuisi suurempi osa perustaitotestistä alle keskiarvon verran pisteitä saaneista opiskelijoista. Heidän kannustamistaan tukiharjoituksiin osallistumiseen voisikin lisätä.

Opiskelijat kokivat useimmiten tehtävät sopivan haastaviksi ja osa mainitsikin asiasta erikseen myös vapaassa palautteessa. Tehtäviä olisi voinut joillakin viikoilla olla hieman vähemmän tai ne olisivat voineet olla hieman erilaisessa järjestyksessä, jotta tehtäväsarjoilla saataisiin mitattua haluttujen asioiden osaamista. Yhteinen teoriaosuus vaikutti helpottavan asian ymmärtämistä, mutta kahdessa vapaassa palautteessa mainittiin käsitteiden visualisoinnin ja intuitiivisen selittämisen hyödyllisyydestä, joten kyseisten asioiden korostaminen yhteisen teoriaosuuden aikana tai videoissa olisi järkevää. Lisäksi tukiharjoitusten hyödyllisyyttä kannattaa tutkia pidemmällä aikavälillä, jotta nähdään paremmin niiden vaikutukset. Tukiharjoituksia jatketaan Insinöörimatematiikka 2 ja 3 -kursseilla, ja niiden toteutuksen jälkeen voidaankin saada lisätietoa tukiharjoitusten vaikuttavuudesta.

LÄHDELUETTELO

[1] A. Biere, M. Heule, H. van Maaren ja T. Walsh. *Handbook of Satisfiability*. 2009, p. 245.

[2] M. Budinich. *The Boolean SATisfiability Problem in Clifford algebra*. 2018, p. 1–2. URL: https://arxiv.org/pdf/1704.02942.pdf (viitattu 06. 06. 2019).

[3] I. Chiswell ja H. Wilfrid. *Mathematical Logic*. Oxford University Press, 2007, p. 83.

[4] R. Epstein ja L. Szczerba. *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundations of Logic*. Princeton University Press, 2011, p. 30–34.

[5] B. Garrett. *Elementary logic*. Routledge, 2014, p. 10–11, 41, 81–84, 120–130.

[6] E. Gurari. *An Introduction to the Theory of Computation*. 1989.

[7] M. Hähkiöniemi, S. Juhala, P. Juutinen, A. Laitinen, T. Raittila ja T. Tikka. *Maa11: lukuteoria ja todistaminen*. Otava, 2017, s. 60–83.

[8] I. Halinen, R. Hotulainen, E. Kauppinen, P. Nilivaara, A. Raami ja M.-P. Vainikainen. *Ajattelun taidot ja oppiminen*. PS-kustannus, 2016, s. 244–250.

[9] P. Heiskanen, P. Kaakinen, J. Lehtonen, M. Leikas ja J. Tahvanainen. *Pitkä matematiikka 11, Lukuteoria ja todistaminen*. Sanoma Pro Oy, 2017, s. 7–9.

[10] Y. Y. Hong, S. Kerr, S. Klymchuk, J. McHardy, P. Murphy, S. Spencer, M. O. J. Thomas ja P. Watson. A comparison of teacher and lecturer perspectives on the transition from secondary to tertiary mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (2009), 40:7, p. 877–899.

[11] M. Järvisalo. Lauselogiikan toteutuvuustarkastus: käytännönläheistä teoriaa. *Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio* (2004), s. 47. URL: www.cse.tkk.fi/fi/tkt-lehti/a22/jarvisalo.pdf (viitattu 12. 08. 2019).

[12] D. Johnson ja M. Garey. *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Bell Telephone Laboratories, Incorporated, 1979, p. 6, 19, 30–38.

[13] J. Joutsenlahti. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä, 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. *Tampereen yliopisto* (2005), s. 67-76, 96–97, 100. URL: https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1 (viitattu 08. 06. 2019).

[14] J. Kauhanen. *Insinöörimatematiikka 1–3*. Tampereen teknillinen yliopisto, matematiikan laitos, 2017, s. 4–8.

[15] K. Klement. *Internet Encyclopedia of Philosophy > Propositional Logic > 4.Tautologies, Logical Equivalence and Validity*. URL: https://www.iep.utm.edu/prop-log/#H4 (viitattu 06. 06. 2019).

[16] M. Lawson. *A first course in logic*. 2017. URL: www.macs.hw.ac.uk/~markl/teaching/BOOK-OCT.pdf (viitattu 06. 06. 2019).

[17] E. Lehtinen, J. Kuusinen ja M. Vauras. *Kasvatustiede, Kasvatuspsykologia*. WSOY Oppimateriaalit Oy, 2007, s. 233–234.

[18] J. Marques-Silva. *9th International Workshop on Discrete Event Systems, Practical Applications of Boolean Satisability*. Goteborg, 2008, p. 74–80. URL: http://www.icsd.aegean.gr/lecturers/konsterg/teaching/KR/SATapplications.pdf (viitattu 03. 10. 2019).

[19] J. Merikoski, A. Virtanen ja P. Koivisto. *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*. Werner Söderström Osakeyhtiö, 2004.

[20] J. Metsämuuronen. *Oppia ikä kaikki – matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus, 2017.

[21] M. Meyling. *Formal Predicate Calculus*. 24.05.2013, p. 11–12.

[22] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. 2015, s. 14, 129–136. URL: https://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf (viitattu 24. 05. 2019).

[23] S. Pohjolainen, H. Raassina, K. Silius, M. Huikkola ja E. Turunen. TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen. *Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos* (2006), s. 27, 79.

[24] S. Pohjolainen, A. Rasila ja K. Kirsi. *Matematiikan opetus ja oppiminen > Matematiikan oppimisen tukeminen teknillisessä yliopistokoulutuksessa*. Niilo Mäki instituutti, 2018, s. 450–474.

[25] J. Rämö, L. Oinonen ja T. Vikberg. Extreme Apprenticeship – Emphasising conceptual understanding in undergraduate mathematics. *Helsingin Yliopisto* (2015). URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288624/document (viitattu 08. 09. 2019).

[26] J. Rämö, L. Oinonen ja T. Vikberg. Yliopistopedagogiikka > Tehostettu kisällioppiminen matematiikan yliopisto-opetuksessa (2015). URL: https://lehti.yliopistopedagogiikka.fi/2015/03/26/tehostettu-kisallioppiminen-matematiikan-yliopisto-opetuksessa/ (viitattu 08. 09. 2019).

[27] J. Rämö ja T. Vikberg. Extreme Apprenticeship – Engaging undergraduate students on a mathematics course. *Helsingin Yliopisto* (2014). URL: https://pdfs.semanticscholar.org/0a90/2e2bc074e4a8caf91f16a2428d85d771937e.pdf (viitattu 08. 09. 2019).

[28] J. Schwartz, D. Cantone ja E. Omodeo. *Computational Logic and Set Theory: Applying Formalized Logic to Analysis*. Springer, 2011, p. 39–41.

[29] SEFI mathematics working group, (muokannut: Leslie Mustoe ja Duncan Lawson). Mathematics for the European Engineer, a Curriculum for the twenty-first Century. *SEFI HQ* (2002), p. 3–8. URL: http://sefi.htw-aalen.de/Curriculum/sefimarch2002.pdf (viitattu 08. 06. 2019).

[30] K. Silius, S. Pohjolainen, J. Kangas, T. Miilumäki ja J. Joutsenlahti. Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä? *Tampere University Press* (2011), s. 242–265. URL: http://urn.fi/urn:nbn:uta-3-943 (viitattu 08. 06. 2019).

[31] K. Silius, S. Pohjolainen, J. Kangas, T. Miilumäki ja J. Joutsenlahti. What can be done to bridge the competency gap between upper-secondary school and university mathematics? *2011 IEEE Global Engineering Education Conference EDUCON, 4–6 April 2011, Amman, Jordania. Piscataway, NJ: IEEE.* (2011), p. 428–436. URL: `https://ieeexplore.ieee.org/document/5773172` (viitattu 08. 06. 2019).

[32] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation, Second Edition*. Thomson Course Technology, 2006, p. 137–150, 269–282.

[33] Tampereen teknillinen yliopisto. *OPINTO-OPAS 2 2017-2018*. 2017–2018, s. 204–230. (Viitattu 10. 10. 2019).

[34] Tampereen teknillinen yliopisto. *Opinto-opas 2018–2019, MAT-01110 Insinöörimatematiikka A 1, 5 op*. 2018–2019. URL: `http://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2018-2019/perus/aineryhmat/Matematiikka/MAT-01110.html` (viitattu 02. 06. 2019).

[35] Tampereen teknillinen yliopisto. *Opinto-opas 2018–2019, MAT-02650 Algoritmimatematiikka, 4 op*. 2018–2019. URL: `http://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2018-2019/perus/aineryhmat/Matematiikka/MAT-02650.html` (viitattu 02. 06. 2019).

[36] Tampereen teknillinen yliopisto. *Opinto-opas 2018–2019, MAT-60556 Mathematical Logic, 5 cr*. 2018–2019. URL: `http://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2018-2019/perus/aineryhmat/Matematiikka/MAT-60556.html` (viitattu 02. 06. 2019).

[37] Tampereen yliopisto. *Opinto-opas 2019–2020, Tieto- ja sähkötekniikan TkK-tutkinto-ohjelma*. 2019–2020. URL: `https://www.tut.fi/opinto-opas/wwwoppaat/opas2019-2020/perus/tutkinnot/Tieto-_ja_sahkotekniikan_TkK-tutkinto-ohjelma-Tietotekniikka-TkK_DI.html` (viitattu 15. 11. 2019).

[38] Tampereen yliopisto. *Opinto-oppaat 2018–2019, MTTMS8 Matemaattinen logiikka 10 op*. 2017–2019. URL: `https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?rid=14914&idx=7&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2018` (viitattu 14. 06. 2019).

[39] Tampereen yliopisto. *Opinto-oppaat > Luonnontieteiden tiedekunta 2017–2019 > Matematiikan maisteriopinnot*. 2017–2019. URL: `https://www10.uta.fi/opas/tutkintoOhjelma.htm?rid=15031&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2018` (viitattu 10. 10. 2019).

[40] Tampereen yliopisto. *Opetusohjelma 2018–2019, MTTMA10 Johdatus logiikkaan 1 5 op*. 2018–2019. URL: `https://www10.uta.fi/opas/opetusohjelma/marjapuuro.htm?id=40317` (viitattu 02. 06. 2019).

[41] Tampereen yliopisto. *Opetusohjelma 2018–2019, MTTMA11 Johdatus logiikkaan 2 5 op*. 2018–2019. URL: `https://www10.uta.fi/opas/opetusohjelma/marjapuuro.htm?id=40318` (viitattu 02. 06. 2019).

[42] Tampereen yliopisto. *Opetusohjelma 2017–2018, Luonnontieteiden tiedekunta, MTTY4 Matematiikan ja tilastotieteen työpajat*. URL: `https://www10.uta.fi/opas/opetusohjelma/marjapuuro.htm?id=36966` (viitattu 22. 11. 2019).

[43] E. Triantafyllou ja O. Timcenko. *PBL Across Cultures: Proceedings from the 4th International Research Symposium on PBL 2013, Applying Constructionism and Problem Based Learning for Developing Dynamic Educational Material for Mathematics At Undergraduate University Level*. Aalborg Universitetsforlag, 2013, p. 335–340.

[44] P. Tynjälä. *Oppiminen tiedon rakentamisena, Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita*. Tekijä ja Kirjayhtymä Oy, 1999, s. 39–44, 58, 111–118, 152–167.

[45] V. Vuorenpää, E. Viro, L. Mannila ja T. Kaarakka. Finnish university students' visions of different relationships in first year engineering mathematics courses. *Tampereen yliopisto* (2020).

[46] E. Weisstein. *Foundations of Mathematics > Logic > Logical Operations > Recreational Mathematics > Mathematical Art > Mathematical Images > Interactive Entries > Interactive Demonstrations > AND*. MathWorld–A Wolfram Web Resource. URL: `http://mathworld.wolfram.com/OR.html` (viitattu 12. 07. 2019).

[47] E. Weisstein. *Foundations of Mathematics > Logic > Logical Operations > Recreational Mathematics > Mathematical Art > Mathematical Images > Interactive Entries > Interactive Demonstrations > OR*. MathWorld–A Wolfram Web Resource. URL: `http://mathworld.wolfram.com/AND.html` (viitattu 12. 07. 2019).

A TUKIMATERIAALIEN ESIMERKKITEHTÄVÄSARJA

Informaatio

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Raja-arvo

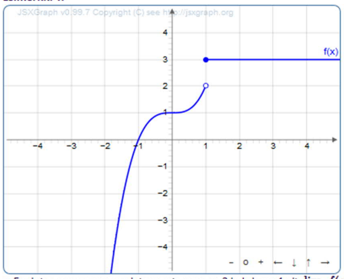
- Funktion f raja-arvo kohdassa a on luku b, jos funktion arvo lähestyy lukua b, kun muuttujan x arvo lähestyy lukua a. Tällöin voidaan merkitä $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
- Funktioiden osamäärän $\frac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvo kohdassa a.

1. Jos $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, niin $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$.
2. Jos $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, niin raja-arvoa $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ei ole olemassa.
3. Jos $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, niin lauseketta $\frac{f(x)}{g(x)}$ voidaan mahdollisesti sievetää. Jos sievennetyllä lausekkeella on raja-arvo b kohdassa a, niin se on myös alkuperäisen osamäärän raja-arvo.

Toispuoleinen raja-arvo

- Toispuoleisiksi raja-arvoiksi kutsutaan vasemman ja oikeanpuoleisia raja-arvoja.

Esimerkki 1.



- Funktion vasemman puoleinen raja-arvo on 2 kohdassa 1 eli $\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$.
- Funktion oikean puoleinen raja-arvo on 3 kohdassa 1 eli $\lim_{x \to 1+} f(x) = 3$.
- Funktiolla f on raja-arvo kohdassa a täsmälleen silloin, kun kohdassa a funktion toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret.

Raja-arvo äärettömyydessä

- Funktion f raja-arvo äärettömyydessä (miinusäärettömyydessä) on luku b, jos funktion arvo lähestyy lukua b muuttujan x kasvaessa (pienentyessä) rajatta. Tällöin voidaan merkitä $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$.

Epäoleelliset raja-arvot ∞ ja $-\infty$

- Funktiolla on epäoleellinen raja-arvo ∞ ($-\infty$) kohdassa a, jos funktion arvot kasvavat (pienenevät) rajatta, kun muuttuja x lähestyy kohtaa a.

Jatkuvuus

- Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos funktion raja-arvo ja funktion arvo ovat kohdassa a yhtä suuret.

Kysymys 1

Kesken

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Tarkastellaan funktiota, jolla on raja-arvo pisteessä x. Mikä seuraavista väittämistä pitää paikkansa?

Valitse yksi:

- Funktio on derivoituva pisteessä x.
- Funktio on jatkuva pisteessä x.
- Funktio on rajoitettu.
- Funktion arvo pisteessä x on äärellinen.
- Kaikki yllä esitetyt väitteet ovat väärin.

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 2

Kesken

Kokonaispisteistä 1,00

Merkitse kysymys

Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Määritä seuraava raja-arvo. Anna vastaus tarkkana arvona!

$\lim_{x \to 10} x^2 + 10 \cdot x + 1 =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 3
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Määritä seuraava raja-arvo. Anna vastaus tarkkana arvona!

$\lim_{x \to 8} \frac{x^2-64}{x-8} =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 4
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Määritä seuraava raja-arvo. Anna vastaus tarkkana arvona!

$\lim_{x \to 8} \frac{x^2-13 \cdot x+40}{x-8} =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 5
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Määritä seuraava raja-arvo.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(7 \cdot x)}{1-\cos(7 \cdot x)} =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 6
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Määritä b siten, että yhtälö $4 = \lim_{x \to 2} (4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + b)$ toteutuu. Anna vastaus tarkkana arvona!

$b =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 7
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 7, & \text{kun } x < 2, \\ a, & \text{kun } x = 2, \\ bx^2, & \text{kun } x > 2. \end{cases}$$

Määritä a:n ja b:n arvot siten, että funktio f on jatkuva jokaisella $x \in \mathbb{R}$.

$a =$

$b =$

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 8
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Olkoon funktio

$$f : f(x) = \frac{|x-4|}{(4-x)\,x}.$$

Määritä seuraavat toispuoleiset raja-arvot

a) $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

c) Onko funktiolla raja-arvo kohdassa $x = 4$? Ei vastattu

d) Onko funktio jatkuva kohdassa $x = 4$? Ei vastattu

Lukitsen vastaukseni

Kysymys 9
Kesken
Kokonaispisteistä 1,00
Merkitse kysymys
Muokkaa kysymystä

Siisti kysymys | Suorita testitapaukset...

Laske seuraavat raja-arvot. Älä käytä likiarvoja. ∞-symbolin saat komennolla inf ja $-\infty$-symbolin komennolla minf.

(a) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{8}{x^2-4}\right) =$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{(x+3)^4-(x-2)^4}{x^3} =$

Lukitsen vastaukseni

B TUTKIMUKSEEN KÄYTETTY KYSELYLOMAKE

Tukimateriaalikysely

Vastaa seuraaviin väitteisiin parhaiten itseäsi kuvaava vaihtoehto.

1. **Opiskelijanumeroni on**

2. **Olen käynyt tukilaskareissa**
   Merkitse vain yksi soikio.
   - 1-2 kertaa
   - 3-4 kertaa
   - 5-6 kertaa

3. **Tukiharjoituksiin osallistumisesta oli hyötyä Insinöörimatematiikka B1/C1 -kurssin kyseisen aihepiirin asioiden ymmärtämisessä**
   Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan						aina

4. **Tehtäväsarjojen vaikeusaste**
   Merkitse vain yksi soikio.
   - liian vaikea
   - sopiva
   - liian helppo

5. **Tukiharjoitusten aluksi yhteisesti käyty teoria oli hyödyllistä**
   Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan						aina

6. **Tehtäväsarjojen alussa oleva teoria auttoi tehtävien ratkaisemisessa**
   Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan						aina

7. **Tehtäväkohtaiset vihjeet auttoivat tehtävän ratkaisemisessa**
   Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan						aina

8. **Katsoin tukimateriaaleihin linkitettyjä videoita**
Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan	◯	◯	◯	◯	◯	aina

9. **Aion osallistua tukiharjoituksiin Insinöörimatematiikka C2 -kurssilla**
Merkitse vain yksi soikio.

	1	2	3	4	5	
ei koskaan	◯	◯	◯	◯	◯	aina

10. **Anna vapaamuotoista palautetta tukimateriaaleista ja -harjoituksista**

Palvelun tarjoaa Google Forms